

## TEMA 6: CÓNICAS

### 1. FORMAS CUADRÁTICAS

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$ . Una función  $f: V \times V \rightarrow K$  es una **forma bilineal** si:

$$\begin{aligned}f(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2, \vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}_1, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}_2, \vec{y}) \\f(\vec{x}, \lambda \cdot \vec{y}_1 + \mu \cdot \vec{y}_2) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}_1) + \mu f(\vec{x}, \vec{y}_2)\end{aligned}$$

Fijando una base  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ , podemos utilizar la siguiente notación matricial:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \dots & f(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X^t \cdot A \cdot Y$$

Si  $A$  es la matriz asociada a  $f$  en la base  $B$ ,  $B'$  es otra base y  $P$  es la matriz asociada al cambio de base de  $B'$  a  $B$  entonces la matriz  $A'$  asociada a  $f$  en la base  $B'$  es la matriz  $P^t \cdot A \cdot P$ .

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $R$  y  $f$  una forma bilineal simétrica en  $V$ . Llamaremos **forma cuadrática asociada a  $f$**  a la aplicación:

$$\varphi: V \rightarrow R \quad \varphi(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$$

• *Ejemplo:*

$$\begin{aligned}f(\vec{x}, \vec{y}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_2 + 3x_1 y_3 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_3 y_3 \\ \varphi(\vec{x}, \vec{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 x_2 + 6x_1 x_3 + 2x_2^2 + 2x_2 x_3 + x_3^2\end{aligned}$$

Decimos que  $f$  es la **forma polar** de  $\varphi$  y queda perfectamente determinada por  $\varphi$ .

• *Ejemplo:*

$$\varphi: R^3 \rightarrow R \quad \varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1 x_2 + 8x_3 x_1$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + a_{33}x_3^2\end{aligned}$$

Como se tiene que cumplir que  $a_{ij} = a_{ji}$  para que sea simétrica:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Con lo que la forma polar de  $\varphi$  es:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Si en una base  $B'$  la matriz asociada a  $\varphi$  es diagonal:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En dicha base la expresión de  $\varphi$  será de la forma:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

El rango de la matriz coincide con el número de  $\lambda_i$  distintos de cero.

Llamaremos **signatura** de  $\varphi$  al número  $\lambda_i$  mayores que cero.

#### CLASIFICACIÓN

- Decimos que  $\varphi$  es **definida positiva** si  $\varphi(\vec{x}) > 0$  para todo  $\vec{x} \neq \vec{0}$ .

$$\varphi \text{ es definida positiva} \Leftrightarrow \text{orden} = \text{rango} = \text{signatura}$$

- Decimos que  $\varphi$  es **semidefinida positiva** si no es definida positiva y  $\varphi(\vec{x}) \geq 0$  para todo  $\vec{x}$ .  
 $\varphi$  es semidefinida positiva  $\Leftrightarrow \text{orden} \geq \text{rango} = \text{signatura}$

- Decimos que  $\varphi$  es **definida negativa** si  $\varphi(\vec{x}) < 0$  para todo  $\vec{x} \neq \vec{0}$ .

$$\varphi \text{ es definida negativa} \Leftrightarrow \text{orden} = \text{rango} = \text{signatura} = 0$$

- Decimos que  $\Phi$  es **semidefinida negativa** si no es definida negativa y  $\Phi(\vec{x}) \leq 0$  para todo  $\vec{x}$ .

$\Phi$  es semidefinida negativa  $\Leftrightarrow$  orden  $>$  rango = signatura = 0

## 2. CÓNICAS (DEFINICIÓN)

Llamamos **cónicas** a las curvas obtenidas como intersección de un plano y un cono.

De forma informal, diremos que una cónica es el conjunto de puntos  $(x,y)$  de  $R^2$  que satisfacen la ecuación  $\Phi(1,x,y) = 0$  para alguna forma cuadrática  $\Phi: R^3 \rightarrow R$ .

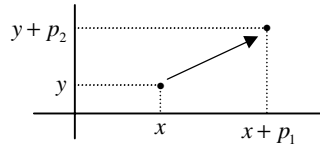
$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Los puntos  $(x,y)$  de  $R^2$  los representaremos por ternas del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}$ .

### Traslaciones

Cualquier punto  $\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}$  puede ser trasladado  $p_1$  unidades a la derecha y  $p_2$  hacia arriba de la siguiente forma:

$$P \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$



Si  $X^t \cdot A \cdot X = 0$  es la ecuación de una cónica, ésta puede ser trasladada con la misma matriz  $P$ :

$$(P \cdot X)^t \cdot A \cdot (P \cdot X) = 0$$

$$X^t \cdot P^t \cdot A \cdot P \cdot X = 0$$

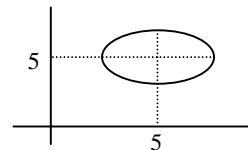
$$A' = P^t \cdot A \cdot P$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ejemplo:**

$4x^2 - 40x + 9y^2 - 126y + 505 = 0$  es una elipse con centro en el punto (5,5).

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 505 & -20 & -63 \\ -20 & 4 & 0 \\ -63 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$



Trasladamos el origen al punto (5,5):

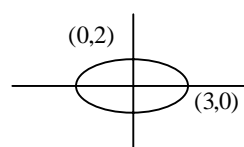
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 505 & -20 & -63 \\ -20 & 4 & 0 \\ -63 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$-36 + 4x^2 + 9y^2 = 0$$

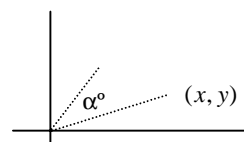
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



## Rotaciones

De forma análoga, tomando como referencia el origen de coordenadas, cualquier punto  $\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}$  puede ser rotado  $\alpha$  grados en sentido contrario a las agujas del reloj de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$



Si  $A$  es la matriz asociada a una cónica, la matriz de la cónica resultante de rotar la anterior es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

## Invariantes

Al realizar una rotación o una traslación a la matriz de una cónica permanecen invariantes los siguientes parámetros:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} + a_{22} \qquad A_{11} + A_{22} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Si la cónica está dada con centro en el origen y ejes sobre los ejes de coordenadas, su matriz será diagonal.

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad k_0 + k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0$$

$$\begin{cases} |A| = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \\ A_{00} = k_1 \cdot k_2 \\ a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2 \\ A_{11} + A_{22} = k_0 k_1 + k_0 k_2 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores podemos obtener los valores de  $k_0$ ,  $k_1$  y  $k_2$ .

• *Ejemplo:* Si la matriz de una determinada cónica es  $\begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & 31/4 & 5\sqrt{3}/4 \\ 0 & 5\sqrt{3}/4 & 21/4 \end{pmatrix}$

Obtenemos el valor de cada invariante:

$$|A| = \frac{-36 \cdot 576}{4 \cdot 4} \qquad A_{00} = \frac{576}{4 \cdot 4} \qquad a_{11} + a_{22} = \frac{52}{4} \qquad A_{11} + A_{22} = \frac{-36 \cdot 52}{4}$$

Planteando el sistema:

$$\left. \begin{cases} |A| = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \\ A_{00} = k_1 \cdot k_2 \\ a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2 \end{cases} \right\} \begin{cases} k_0 = -36; \quad k_1 = 4; \quad k_2 = 9 & -36 + 4x^2 + 9y^2 = 0 \\ k_0 = -36; \quad k_1 = 9; \quad k_2 = 4 & -36 + 9x^2 + 4y^2 = 0 \end{cases}$$

Las dos soluciones que aparecen se corresponden con elipses. La diferencia entre ambas está en la consideración de cuál es el eje mayor o menor.

### 3. CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS

Dada la ecuación de una cónica de la forma  $k_0 + k_1 \cdot x^2 + k_2 \cdot y^2 = 0$ .

**Elipse:**  $k_1 \cdot k_2 > 0$

(tienen el mismo signo)

- **elipse real:**  $k_0 < 0$  (es del signo opuesto)
- **elipse degenerada** (punto):  $k_0 = 0$  (la solución es (0,0))
- **elipse imaginario:**  $k_0 > 0$  (del mismo signo) (no tiene solución real)

**Hipérbola:**  $k_1 \cdot k_2 < 0$

(tienen distinto signo)

- **hipérbola real:**  $k_0 \neq 0$
- **hipérbola degenerada** (dos rectas que se cortan en un punto):  $k_0 = 0$   
Las rectas son: 
$$\begin{cases} bx + ay = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

**Parábola:**  $k_1 \cdot k_2 = 0$

- $k_1 = 0$       **dos rectas reales:**  $k_0 \cdot k_2 < 0$  (de la forma  $y = \pm \sqrt{-k_0/k_2}$ )  
                      **dos rectas reales coincidentes:**  $k_0 = 0$   
                      **dos rectas imaginarias:**  $k_0 \cdot k_2 > 0$
- $k_2 = 0$       **dos rectas reales:**  $k_0 \cdot k_1 < 0$   
                      **dos rectas reales coincidentes:**  $k_0 = 0$   
                      **dos rectas imaginarias:**  $k_0 \cdot k_1 > 0$
- si no es ninguno de los casos anteriores:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad 2ax + k_2 y^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & k_1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_1 x^2 + 2ay = 0$$