

Capítulo 4

Aplicaciones lineales

4.1 Aplicaciones lineales. Generalidades

Nota En todo lo que sigue y salvo indicación de lo contrario, utilizaremos las siguientes notaciones:

- V y V' serán dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K . Convendremos en que $\dim(V) = n$ y $\dim(V') = m$.
- $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_m\}$ serán bases de V y V' , respectivamente.
- Con los símbolos $f : V \longrightarrow V'$, indicaremos que f es una aplicación de V en V' .
- Si \mathbf{x}' es la imagen por f del vector $\mathbf{x} \in V$ lo representaremos $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ y convendremos en que si $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$.

Definición 4.1.1 Sea $f : V \longrightarrow V'$, diremos que f es una *aplicación lineal* u *homomorfismo* de V en V' si verifica las condiciones siguientes:

$$a) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}).$$

$$b) \quad \forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x} \in V, f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

Notación $\text{Hom}(V, V')$ representará al conjunto de las aplicaciones lineales de V en V' .

Proposición 4.1.1 (PROPIEDADES INMEDIATAS).

1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.
3. $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$.
4. f conserva la dependencia lineal. Es decir, si $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es un conjunto de vectores l.d., $A' = \{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_r)\}$ es l.d.

Demostración Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$.

1. $\forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{0} \implies f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{0}) \implies f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $\forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) \implies \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) \implies f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

3. Como $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$, se tiene que

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + (-\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (-f(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}).$$

4. $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ l.d. $\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, no todos nulos, tales que verifican la relación

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0}.$$

Aplicando f a los dos miembros, se tiene que

$$f(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \implies \lambda_1 f(\mathbf{a}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{a}_2) + \dots + \lambda_r f(\mathbf{a}_r) = \mathbf{0},$$

de donde se deduce que $A' = \{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_r)\}$ es l.d. ya que, por hipótesis, no todos los λ_i son nulos.¹

Definición 4.1.2

1. Diremos que f es un *endomorfismo* de V , si f es una aplicación lineal de V en V .
Al conjunto de los endomorfismos de V lo representaremos por $\text{End}(V)$.
2. Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, diremos que f es un *isomorfismo* de V en V' si f es una aplicación biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).
3. Diremos que los espacios vectoriales V y V' son *isomorfos* ($V \simeq V'$), si existe un isomorfismo de V en V' .
4. Diremos que f es un *automorfismo* de V , si f es un isomorfismo de V en V .
Al conjunto de los automorfismos de V lo notaremos por $\text{Gl}(V)$.
5. Sean $f, g \in \text{Hom}(V, V')$. Diremos que $f = g$ si y sólo si $\forall \mathbf{x} \in V, f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$.

Proposición 4.1.2

1. La aplicación

$$0 : V \longrightarrow V'$$

definida por,

$$\forall \mathbf{x} \in V, 0(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

es una aplicación lineal de V en V' llamada *aplicación cero*.

2. La aplicación

$$1_V : V \longrightarrow V$$

definida por,

$$\forall \mathbf{x} \in V, 1_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

es un automorfismo de V llamado *automorfismo identidad*.

Las demostraciones son triviales y las dejamos como ejercicio.

¹En general, f no conserva la independencia lineal.

Proposición 4.1.3 Sea \mathcal{B} una base de V . La aplicación

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$$

definida por,

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(Para una demostración, ver proposición 3.2.2)

Proposición 4.1.4 Sea $\dim(V) = n$ y $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n \in V'$, exactamente n vectores cualesquiera de V' . Sea $\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La aplicación

$$f : V \longrightarrow V'$$

definida por,

$$\forall \mathbf{x} \in V, f(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{v}'_1 + x_2 \mathbf{v}'_2 + \dots + x_n \mathbf{v}'_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}'_i,$$

verifica que:

1. $f \in \text{Hom}(V, V')$.
2. f es la única aplicación lineal de V en V' tal que $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}'_i$.
3. Si $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ es una base de V' , entonces f es un isomorfismo.

Demostración

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda \in K$ donde $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i$ e $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{u}_i$. Se tiene que

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \mathbf{u}_i,$$

de donde:

- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}'_i = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.
- $f(\lambda \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i \mathbf{v}'_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}'_i = \lambda f(\mathbf{x})$.

2. Como $(\mathbf{u}_i)_{\mathcal{B}} = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ es claro que $f(\mathbf{u}_i) = 1 \cdot \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}'_i$.

En cuanto a la unicidad, supongamos que $\exists g \in \text{Hom}(V, V') \mid g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}'_i$. Sería entonces

$$g(\mathbf{x}) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}'_i = f(\mathbf{x}),$$

luego $g = f$.

3. Basta probar que, en este caso, f es inyectiva y sobreyectiva.

- $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}'_i \implies \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \implies x_i - y_i = 0$,
($i = 1, \dots, n$), por ser \mathcal{B}' base de V' . Por tanto $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ y f es inyectiva.
- Sea $\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}'_i \in V'$. Es claro que el vector $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \in V$ verifica que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$,
luego f es sobreyectiva.

Proposición 4.1.5 Sea f un isomorfismo de V en V' y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V , entonces $\mathcal{B}' = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ es una base de V' .

Demostración Hay que probar que \mathcal{B}' es una parte libre de V' y un sistema de generadores de V' .

- \mathcal{B}' es s.g. de V' . En efecto, si $f: V \longrightarrow V'$ es isomorfismo, f es sobreyectiva y por tanto,

$$\forall \mathbf{x}' \in V', \exists \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$$

\Downarrow

$$\mathbf{x}' = f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{u}_n),$$

igualdad que prueba nuestro aserto.

- \mathcal{B}' es un parte libre de V' . Por ser f isomorfismo, f es inyectiva ($f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$). Dicho esto, partiendo de la relación

$$\alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_n f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$$

\Downarrow

$$f(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = f(\mathbf{0})$$

\Downarrow

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

\Downarrow

$$\alpha_i = 0, (i = 1, \dots, n)$$

Teorema 4.1.1 Dos espacios vectoriales sobre K son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión. Simbólicamente:

$$V \simeq V' \iff \dim(V) = \dim(V').$$

Demostración

\implies $V \simeq V'$ implica que existe un isomorfismo f de V en V' . Por la proposición 4.1.5, la imagen de una base de V es una base de V' y, de aquí, que $\dim(V) = \dim(V')$.

\impliedby Sea $\dim(V) = \dim(V') = n$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ bases de V y V' respectivamente. Entonces la aplicación

$$f: V \longrightarrow V'$$

definida por:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{v}'_1 + x_2 \mathbf{v}'_2 + \dots + x_n \mathbf{v}'_n$$

es, de acuerdo con el apartado 3 de la proposición 4.1.4, un isomorfismo.

Definición 4.1.3 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$ y sean

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{u}'_1 + a_{21}\mathbf{u}'_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{u}'_m, \\ f(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{u}'_1 + a_{22}\mathbf{u}'_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{u}'_m, \\ &\vdots \\ f(\mathbf{u}_n) &= a_{1n}\mathbf{u}'_1 + a_{2n}\mathbf{u}'_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{u}'_m. \end{aligned}$$

Llamamos matriz de f respecto de las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' de V y V' , respectivamente, a la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ de orden $m \times n$ cuyas columnas son, sucesivamente, las coordenadas de $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)$ respecto de \mathcal{B}' . Es decir,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.1.6 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, se verifica que

$$(\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t.$$

Demostración Sea $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n$ y $f(\mathbf{u}_i) = a_{1i}\mathbf{u}'_1 + a_{2i}\mathbf{u}'_2 + \dots + a_{mi}\mathbf{u}'_m$. Como $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, se tiene que

$$\mathbf{x}' = f(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n) \Rightarrow \mathbf{x}' = x_1f(\mathbf{u}_1) + x_2f(\mathbf{u}_2) + \dots + x_nf(\mathbf{u}_n).$$

Tomando en esta última igualdad las coordenadas de ambos miembros, respecto de \mathcal{B}' , se tiene,

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) = x_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) + \dots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}),$$

de donde

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

sistema, cuya expresión matricial es

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o bien, simbólicamente,

$$(\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t.$$

Definición 4.1.4 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$. Llamamos *núcleo* de f y lo notamos $\ker(f)$, al siguiente subconjunto de V :

$$\ker(f) = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Proposición 4.1.7 Si $f \in \text{Hom}(V, V')$, se verifica que:

1. $\ker(f)$ es una variedad lineal de V .

2. Las ecuaciones de $\ker(f)$ vienen dadas por

$$\ker(f) \equiv A\mathbf{x}^t = 0 \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

donde $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

3. $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \text{rg}(A)$.

4. f es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ker(f)$ y $\lambda \in K$.

- Desde luego $\ker(f) \neq \emptyset$ ya que, al menos, $\mathbf{0} \in \ker(f)$.
- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ker(f) \implies f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \ker(f)$.
- $\mathbf{x} \in \ker(f) \implies f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \lambda f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies f(\lambda \mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \lambda \mathbf{x} \in \ker(f)$.

2. $\mathbf{x} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff A(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathbf{0}^t \iff \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ es solución del sistema $A\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t$.

3. Es consecuencia inmediata del apartado anterior.

4. \implies f inyectiva $\implies \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$. Por consiguiente, $\forall \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \implies \ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

\impliedby Sea $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ y supongamos que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$.
 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(f) = \{\mathbf{0}\} \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{y} \implies f$ inyectiva.

Definición 4.1.5 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, llamamos imagen de la aplicación f y la notamos por $\text{img}(f)$, al siguiente subconjunto de V' :

$$\text{img}(f) = \{f(\mathbf{x}) \in V' \mid \mathbf{x} \in V\}.$$

Es decir,

$$\mathbf{x}' \in \text{img}(f) \iff \exists \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'.$$

Proposición 4.1.8 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, se verifica que:

1. $\text{img}(f)$ es una variedad lineal de V' .
2. Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, $\mathcal{B}_0 = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ es un sistema de generadores de $\text{img}(f)$.
3. $\dim(\text{img}(f)) = \text{rg}(A)$, donde $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Demostración

1. Sean $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \text{img}(f)$ y $\lambda \in K$.

- $\text{img}(f) \neq \emptyset$ ya que, al menos, $\mathbf{0} \in \text{img}(f)$.
- $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \text{img}(f) \implies \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}', f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' \implies f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \implies \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \in \text{img}(f)$.

$$\bullet \mathbf{x}' \in \text{img}(f) \implies \exists \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \implies \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \implies f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \implies \lambda \mathbf{x}' \in \text{img}(f).$$

2. $\forall \mathbf{x}' \in \text{img}(f) \implies \exists \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$. Sea $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$. Se tiene que

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{u}_n),$$

lo que prueba que \mathcal{B}_0 es un sistema de generadores de $\text{img}(f)$.

3. Baste recordar que las columnas de A son las coordenadas de \mathcal{B}_0 respecto de la base \mathcal{B}' de V' y que el número máximo de vectores l.i. de \mathcal{B}_0 , es decir la $\dim(\text{img}(f))$, es $\text{rg}(A)$.

Proposición 4.1.9 Para toda aplicación $f \in \text{Hom}(V, V')$, se verifica que

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{img}(f)).$$

Demostración Basta recordar que

$$\left. \begin{aligned} \dim(\ker(f)) &= \dim(V) - \text{rg}(A) \\ \dim(\text{img}(f)) &= \text{rg}(A) \end{aligned} \right\}$$

y el resultado se obtiene, simplemente, sumando las igualdades anteriores.

Definición 4.1.6 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$ y L una variedad lineal de V . Llamamos imagen de L por f y la notamos por $f(L)$, al subconjunto de V' definido por

$$f(L) = \{f(\mathbf{x}) \in V' \mid \mathbf{x} \in L\}.$$

Es decir,

$$\mathbf{x}' \in f(L) \iff \exists \mathbf{x} \in L \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'.$$

Proposición 4.1.10 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, L una variedad lineal de V , se verifica que:

1. $f(L)$ es una variedad lineal de V' .
2. Si $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ una base de L , $\mathcal{B}'_0 = \{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_r)\}$ es un sistema de generadores de $f(L)$.

Demostración

1. Sean $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in f(L)$, $\lambda \in K$.

$\bullet f(L) \neq \emptyset$, ya que $\mathbf{0} \in f(L)$.

$\bullet \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in f(L) \implies \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}', f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' \implies f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$. Como $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$, deducimos que $\mathbf{x}' + \mathbf{y}' \in f(L)$.

$\bullet \mathbf{x}' \in f(L) \implies \exists \mathbf{x} \in L \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \implies \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \implies f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \implies \lambda \mathbf{x}' \in f(L)$, por la misma razón que en el punto anterior.

2. Por definición, $\forall \mathbf{x}' \in f(L) \implies \exists \mathbf{x} \in L \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$.

Por otra parte,

$$\mathbf{x} \in L \implies \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K \mid \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{a}_r.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = f(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{a}_r) = \alpha_1 f(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{a}_2) + \dots + \alpha_r f(\mathbf{a}_r),$$

de donde deducimos que \mathcal{B}'_0 es un sistema de generadores de $f(L)$.

Definición 4.1.7 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$ y L' una variedad lineal de V' , llamamos imagen recíproca de L' por la aplicación f , y la notamos por $f^{-1}(L')$, al subconjunto de V definido por la siguiente igualdad:

$$f^{-1}(L') = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) \in L'\}.$$

Es decir,

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(L') \iff f(\mathbf{x}) \in L'.$$

Proposición 4.1.11 En las condiciones de la definición, se verifica que:

1. $f^{-1}(L')$ es una variedad lineal de V .
2. Si $M(\mathbf{x}')^t = 0$ son unas ecuaciones implícitas de L' , entonces

$$MA\mathbf{x}^t = 0, \quad (A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))$$

es la expresión matricial de un sistema de ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L')$.

Demostración

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(L')$ y $\lambda \in K$.
 - $f^{-1}(L') \neq \emptyset$ ya que $\mathbf{0} \in f^{-1}(L')$.
 - $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(L') \implies f(\mathbf{x}) \in L', f(\mathbf{y}) \in L' \implies f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in L' \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in f^{-1}(L')$.
 - $\mathbf{x} \in f^{-1}(L') \implies f(\mathbf{x}) \in L' \implies \lambda f(\mathbf{x}) \in L' \implies f(\lambda \mathbf{x}) \in L' \implies \lambda \mathbf{x} \in f^{-1}(L')$.
2. $\mathbf{x} \in f^{-1}(L') \iff \exists \mathbf{x}' \in L' \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \iff A\mathbf{x}_{\mathcal{B}}^t = (\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'})^t \iff MA(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = M(\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'})^t = 0 \iff \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ es solución del sistema $MA\mathbf{x}^t = 0$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), lo que prueba la proposición.

Nota Es importante observar que, en realidad, las ecuaciones calculadas corresponden a la imagen recíproca de la variedad $L' \cap \text{img}(f)$ y que, en el caso particular de que $L' \cap \text{img}(f) = \{\mathbf{0}\}$, $f^{-1}(L') = \ker(f)$.

Ejercicio Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre \mathbb{R} tales que $\dim(V) = 4$ y $\dim(V') = 3$ y \mathcal{B} y \mathcal{B}' sus bases respectivas. Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$ cuya matriz respecto de dichas bases es

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Se pide:

1. Calcular la dimensión del núcleo de f , un sistema de ecuaciones implícitas independientes y una base de $\ker(f)$.
2. La dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas de $\text{img}(f)$.
3. Verificar la fórmula

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{img}(f)).$$
4. Sea $L = \langle (1, 2, 1, -1), (2, 1, 1, 0) \rangle$ una variedad de V , calcular un sistema de ecuaciones implícitas de $f(L)$.

5. Sea L' una variedad de V' cuyas ecuaciones son

$$L' \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Calcular unas ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L')$ y comentar el resultado.

Solución

1. • Como $\text{rg}(A) = 2$, se deduce que $\dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2$

$$\bullet \ker(f) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ O bien,}$$

$$\ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

• Dando a (x_2, x_3) los valores canónicos $(1, 0), (0, 1)$ se obtiene como base de $\ker(f)$,

$$\mathcal{B}_0 = \{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)\}.$$

2. • $\dim(\text{img}(f)) = \text{rg}(A) = 2$

• Una base de $\text{img}(f)$ estará formada por dos columnas independientes de la matriz A . Tomando las dos primeras, obtenemos la base

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}.$$

$$\bullet \mathbf{x} \in \text{img}(f) \iff \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \begin{vmatrix} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ de donde}$$

$$\text{img}(f) \equiv -x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

3. Claramente $4 = \dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{img}(f)) = 2 + 2$.

4. Como $L = \langle (1, 2, 1, -1), (2, 1, 1, 0) \rangle$, $f(L) = \langle f(1, 2, 1, -1), f(2, 1, 1, 0) \rangle$. Por tanto calculemos la imagen de los vectores de la base de L .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

De aquí, que

$$f(L) = \langle (0, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle.$$

Una ecuación implícita de $f(L)$ es

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Nótese que $f(L) = \text{img}(f)$.

$$5. f^{-1}(L') \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Es decir,}$$

$$f^{-1}(L') \equiv x_1 + 2x_3 + x_4 = 0.$$

4.2 Factorización canónica de un homomorfismo

Proposición 4.2.1 Sean $f \in \text{Hom}(V, V')$ y $g \in \text{Hom}(V', V'')$, la aplicación compuesta

$$g \circ f : V \longrightarrow V''$$

definida por

$$g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})),$$

verifica:

1. $g \circ f \in \text{Hom}(V, V'')$.
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$, donde \mathcal{B} , \mathcal{B}' y \mathcal{B}'' son bases, respectivamente, de V , V' y V'' .

Demostración

1. Veamos, en primer lugar, que $g \circ f$ es lineal. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda \in K$.
 - $(g \circ f)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x})) + g(f(\mathbf{y})) = (g \circ f)(\mathbf{x}) + (g \circ f)(\mathbf{y})$.
 - $(g \circ f)(\lambda \mathbf{x}) = g(f(\lambda \mathbf{x})) = g(\lambda f(\mathbf{x})) = \lambda g(f(\mathbf{x})) = \lambda (g \circ f)(\mathbf{x})$.
2. Nos ayudaremos con el siguiente diagrama en el que figura como subíndice una base del correspondiente espacio vectorial,

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{g \circ f} & V''_{\mathcal{B}''} \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & V'_{\mathcal{B}'} & \end{array}$$

Sean

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}'' = g(\mathbf{x}') \implies \mathbf{x}'' = (g \circ f)(\mathbf{x}),$$

de donde

$$(\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t, \quad (4.1)$$

$$(\mathbf{x}''_{\mathcal{B}''})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g)(\mathbf{x}'_{\mathcal{B}'})^t, \quad (4.2)$$

Sustituyendo 4.1 en 4.2, obtenemos que

$$(\mathbf{x}''_{\mathcal{B}''})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t. \quad (4.3)$$

Por otra parte,

$$(\mathbf{x}''_{\mathcal{B}''})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t. \quad (4.4)$$

Igualando los segundos miembros de 4.3 y 4.4 y teniendo en cuenta que dichas fórmulas se verifican para $\forall \mathbf{x} \in V$, se obtiene el resultado.

Proposición 4.2.2 Sea $f : V \simeq V'$. La aplicación inversa

$$f^{-1} : V' \longrightarrow V,$$

definida por

$$f^{-1}(\mathbf{x}') = \mathbf{x} \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}',$$

verifica:

1. f^{-1} es un isomorfismo de V' en V .
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)^{-1}$.

Demostración Recordemos que por ser f isomorfismo, f es una aplicación biyectiva y que, por consiguiente:

1. Bastará probar que f^{-1} es lineal. Sean $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in V'$, $\lambda \in K$.
 - $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in V' \implies \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}', f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' \implies f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' \implies f^{-1}(\mathbf{x}' + \mathbf{y}') = \mathbf{x} + \mathbf{y} = f^{-1}(\mathbf{x}') + f^{-1}(\mathbf{y}')$.
 - $\mathbf{x}' \in V' \implies \exists \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \implies \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \implies f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}' \implies f^{-1}(\lambda \mathbf{x}') = \lambda \mathbf{x} = \lambda f^{-1}(\mathbf{x}')$.
2. Sea $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ y $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n)$ bases de V y V' , respectivamente. Desde luego $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ y es invertible por ser \mathcal{B} base de V . Además sabemos que

$$f^{-1} \circ f = i_V, \quad f \circ f^{-1} = i_{V'}.$$

Tomando, por ejemplo, la primera de las igualdades y ayudándonos con el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f^{-1} \circ f} & V_{\mathcal{B}} \\ & f \searrow & \nearrow f^{-1} \\ & V'_{\mathcal{B}'} & \end{array}$$

tenemos que

$$I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(i_V) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f),$$

de donde se deduce inmediatamente el apartado 2 de la proposición.

Lema 4.2.1 Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$. La aplicación

$$\pi : V \longrightarrow V / \ker(f),$$

definida por

$$\forall \mathbf{x} \in V, \pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \ker(f)$$

es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es $\ker(f)$. Este homomorfismo recibe el nombre de *proyección canónica* de V sobre el espacio cociente $V / \ker(f)$.

Demostración

1. Probemos que π es aplicación lineal. En efecto, para $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\forall \lambda \in K$, se tiene:

- $\pi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \ker(f) = (\mathbf{x} + \ker(f)) + (\mathbf{y} + \ker(f)) = \pi(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{y})$.
- $\pi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + \ker(f) = \lambda(\mathbf{x} + \ker(f)) = \lambda\pi(\mathbf{x})$.

2. Claramente π es sobreyectiva ya que dada la clase $\mathbf{x} + \ker(f)$, por definición $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \ker(f)$.

3. Veamos que $\ker(\pi) = \ker(f)$. En efecto,

$$\mathbf{x} \in \ker(\pi) \iff \pi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} + \ker(f) \iff \mathbf{x} + \ker(f) = \mathbf{0} + \ker(f) \iff \mathbf{x} \in \ker(f).$$

Lema 4.2.2 (PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA) Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, la aplicación

$$\varphi : V / \ker(f) \longrightarrow \text{img}(f)$$

definida por,

$$\varphi(\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\mathbf{x})$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración Hay que probar que φ está bien definida, es aplicación lineal y es biyectiva.

- **φ está bien definida.** En efecto,
 $\mathbf{x} + \ker(f) = \mathbf{y} + \ker(f) \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(f) \implies f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies \varphi(\mathbf{x} + \ker(f)) = \varphi(\mathbf{y} + \ker(f)).$
- **φ es lineal.** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \forall \lambda \in K$ se tiene:
 $\varphi[(\mathbf{x} + \ker(f)) + (\mathbf{y} + \ker(f))] = \varphi[(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \ker(f)] = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \ker(f)) + \varphi(\mathbf{y} + \ker(f)).$
 $\varphi[\lambda(\mathbf{x} + \ker(f))] = \varphi(\lambda\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda\varphi(\mathbf{x} + \ker(f)).$
- **φ es inyectiva.** $\varphi(\mathbf{x} + \ker(f)) = \varphi(\mathbf{y} + \ker(f)) \implies f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \implies f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(f) \implies \mathbf{x} + \ker(f) = \mathbf{y} + \ker(f).$
- **φ es sobreyectiva.** $\forall \mathbf{x}' \in \text{img}(f), \exists \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$.
 La clase $\mathbf{x} + \ker(f)$ verifica que $\varphi(\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$.

Nota En realidad, bastaría haber probado sólo una de las dos últimas condiciones ya que

$$\dim(V) - \dim(\ker(f)) = \dim(\text{img}(f)) \implies \dim(V / \ker(f)) = \dim(\text{img}(f)).$$

De todo lo anterior deducimos que φ es isomorfismo.

Lema 4.2.3 . Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, la aplicación

$$i : \text{img}(f) \longrightarrow V',$$

definida por

$$\forall \mathbf{x}' \in \text{img}(f), i(\mathbf{x}') = \mathbf{x}',$$

es un homomorfismo inyectivo llamado *inclusión canónica* de $\text{img}(f)$ en V' .

La demostración es trivial.

Teorema 4.2.1 (FACTORIZACIÓN CANÓNICA DE UN HOMOMORFISMO). Sea $f \in \text{Hom}(V, V')$, se verifica que el siguiente diagrama es *conmutativo*.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ V/\ker(f) & \xrightarrow{\varphi} & \text{img}(f) \end{array}$$

Es decir,

$$f = i \circ \varphi \circ \pi$$

donde:

- π es la proyección canónica de V sobre $V/\ker(f)$.
- φ es un isomorfismo de $V/\ker(f)$ sobre $\text{img}(f)$.
- i es la inclusión canónica de $\text{img}(f)$ en V' .

Demostración $\forall \mathbf{x} \in V$, $(i \circ \varphi \circ \pi)(\mathbf{x}) = i(\varphi(\pi(\mathbf{x}))) = i(\varphi(\mathbf{x} + \ker(f))) = i(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$.

Corolario Si \mathcal{B} , \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 , \mathcal{B}' son, respectivamente, bases de V , $V/\ker(f)$ e $\text{img}(f)$, se verifica que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'}(i) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(\pi).$$

Ejercicio Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 sobre \mathbb{R} , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V y $f \in \text{End}(V)$ cuya matriz respecto de la base \mathcal{B} es

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Probar que

$$\mathcal{B}_1 = \{2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \ker(f), \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \ker(f)\}$$

es una base de $V/\ker(f)$.

Igualmente, comprobar, que

$$\mathcal{B}_2 = \{(2, 1, 2, 1), (1, -1, 1, -1)\}$$

es una base de $\text{img}(f)$.

2. Tomando como bases de los respectivos espacios \mathcal{B} , \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 , hallar las matrices de los homomorfismos que intervienen en la factorización canónica de f .

Solución

1. Se tiene que $\text{rg}(A) = 2$ y que las dos primeras columnas de A son linealmente independientes. Por consiguiente:

- Un sistema de ecuaciones implícitas independientes de $\ker(f)$ vienen dadas por

$$\ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

cuya solución general es $x_1 = -x_3 - 2x_4$, $x_2 = -x_3 - x_4$. Luego una base del núcleo de f es

$$\mathcal{B}_0 = \{(-1, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)\}.$$

Para probar que \mathcal{B}_1 es una base de $V/\ker(f)$ basta ver que $\mathcal{B}_0 \cup \{2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2\}$ es una base de V o, de otro modo, que $\{2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2\}$ amplía la base \mathcal{B}_0 de $\ker(f)$ a base de V lo cual es inmediato ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

- Las dos primeras columnas de A constituyen una base de $\text{img}(f)$ y, por tanto, unas ecuaciones paramétricas de $\text{img}(f)$ viene dadas por el sistema:

$$\text{img}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 \end{cases}$$

Para probar que $\mathcal{B}_2 = \{(2, 1, 2, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ es una base de $\text{img}(f)$ basta ver que es linealmente independiente, lo cual es inmediato, y que verifican las ecuaciones de $\text{img}(f)$ lo cual, en este caso, es igualmente inmediato: basta dar sucesivamente a λ_1 y a λ_2 los valores $(1, 1)$ $(-1, 2)$.

2. Consideremos la proyección canónica

$$p: V \longrightarrow V/\ker(f),$$

definida por

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \ker(f).$$

Para obtener la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(p)$, tenemos que calcular las coordenadas respecto de la base \mathcal{B}_1 de los vectores $p(\mathbf{u}_1)$, $p(\mathbf{u}_2)$, $p(\mathbf{u}_3)$ y $p(\mathbf{u}_4)$. Sean éstas, respectivamente, (α_i, β_i) , $i = 1, \dots, 4$.

- Como $p(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \ker(f)$, si (α_1, β_1) son sus coordenadas respecto de \mathcal{B}_1 , se tendrá que

$$\mathbf{u}_1 + \ker(f) = \alpha_1(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \ker(f)) + \beta_1(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \ker(f)).$$

Es decir,

$$\mathbf{u}_1 + \ker(f) = (2\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{u}_1 + (-\alpha_1 - 2\beta_1)\mathbf{u}_2 + \ker(f),$$

de donde deducimos que

$$(2\alpha_1 + \beta_1 - 1)\mathbf{u}_1 + (-\alpha_1 - 2\beta_1)\mathbf{u}_2 \in \ker(f)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(2\alpha_1 + \beta_1 - 1, -\alpha_1 - 2\beta_1, 0, 0)$$

debe verificar las ecuaciones de $\ker(f)$. Sustituyendo en ellas se tiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 1 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_1 = -\frac{1}{3}$ y, por consiguiente,

$$(p(\mathbf{u}_1))_{\mathcal{B}_1} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

- Análogamente, $p(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 + \ker(f)$ y si (α_2, β_2) son sus coordenadas respecto de \mathcal{B}_1 , se tendrá que

$$\mathbf{u}_2 + \ker(f) = \alpha_2(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \ker(f)) + \beta_2(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \ker(f)).$$

Es decir,

$$\mathbf{u}_1 + \ker(f) = (2\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{u}_1 + (-\alpha_2 - 2\beta_2)\mathbf{u}_2 + \ker(f),$$

de donde deducimos que

$$(2\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{u}_1 + (-\alpha_2 - 2\beta_2 - 1)\mathbf{u}_2 \in \ker(f)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(2\alpha_2 + \beta_2, -\alpha_2 - 2\beta_2 - 1, 0, 0)$$

debe verificar las ecuaciones de $\ker(f)$. Sustituyendo en ellas se tiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha_2 - \beta_2 = 1 \\ 2\alpha_2 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\beta_2 = -\frac{2}{3}$ y, por consiguiente,

$$(p(\mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}_1} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

- Como $p(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3 + \ker(f)$, se tendrá que

$$\mathbf{u}_3 + \ker(f) = \alpha_3(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \ker(f)) + \beta_3(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \ker(f)).$$

Es decir,

$$\mathbf{u}_3 + \ker(f) = (2\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{u}_1 + (-\alpha_3 - 2\beta_3)\mathbf{u}_2 + \ker(f),$$

de donde

$$(2\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{u}_1 + (-\alpha_3 - 2\beta_3)\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \in \ker(f).$$

Es decir,

$$(2\alpha_3 + \beta_3, -\alpha_3 - 2\beta_3, -1, 0) \in \ker(f).$$

Luego, sustituyendo, se tiene que

$$\begin{cases} \alpha_3 - \beta_3 = 0 \\ 2\alpha_3 + \beta_3 = 1 \end{cases}$$

de donde $\alpha_3 = \frac{1}{3}$, $\beta_3 = \frac{1}{3}$ y, por consiguiente,

$$(p(\mathbf{u}_3))_{\mathcal{B}_1} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right).$$

- Procediendo de modo similar con $p(\mathbf{u}_4)$, llegaremos a que

$$(2\alpha_4 + \beta_4, -\alpha_4 - 2\beta_4, 0, -1) \in \ker(f).$$

Luego, sustituyendo, se tiene que

$$\begin{cases} \alpha_4 - \beta_4 = 1 \\ 2\alpha_4 + \beta_4 = 2 \end{cases}$$

de donde $\alpha_4 = 1$, $\beta_4 = 0$ y, por consiguiente,

$$(p(\mathbf{u}_4))_{\mathcal{B}_1} = (1, 0).$$

De todo lo anterior deducimos que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(p) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Consideremos ahora el isomorfismo

$$\varphi : V / \ker(f) \longrightarrow \text{img}(f),$$

definido por

$$\varphi(\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\mathbf{x}).$$

Tenemos que calcular la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ y, para ello hay que calcular las coordenadas de

$$\varphi(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \ker(f)) \text{ y } \varphi(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \ker(f))$$

respecto de la base \mathcal{B}_2 de $\text{img}(f)$.

- Como $\varphi(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \ker(f)) = f(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$, se tiene que

$$(f(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$(f(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}} = (1, 2, 1, 2).$$

Ahora tenemos que expresar este resultado respecto de la base \mathcal{B}_2 para lo cual hay que resolver el sistema

$$(1, 2, 1, 2) = \alpha_1(2, 1, 2, 1) + \beta_1(1, -1, 1, -1),$$

o sea:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 - \beta_1 = 2 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 - \beta_1 = 2 \end{cases}$$

de donde

$$(f(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}_2} = (1, -1)$$

- Análogamente,

$$(f(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$(f(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}} = (-1, 1, -1, 1)$$

y es, en este caso evidente que

$$(f(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2))_{\mathcal{B}_2} = (0, -1)$$

De lo anterior deducimos que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Por último, consideremos la aplicación inyectiva

$$i : \text{img}(f) \longrightarrow V,$$

definida por

$$\forall \mathbf{x}' \in \text{img}(f), i(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'.$$

Tenemos que calcular la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}}(i)$ y, para ello, sólo hay que tener en cuenta que:

- $(i(2, 1, 2, 1))_{\mathcal{B}} = (2, 1, 2, 1).$
- $(i(1, -1, 1, -1))_{\mathcal{B}} = (1, -1, 1, -1).$

Por consiguiente,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}}(i) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación Como $f = i \circ \varphi \circ p$, se tiene que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}}(i) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(p),$$

luego, sustituyendo,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

resultado que, como puede comprobarse, es la matriz dada.

Proposición 4.2.3 (CAMBIO DE BASES EN UN HOMOMORFISMO). Sean $f \in \text{Hom}(V, V')$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de V y $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ bases de V' . Se verifica que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(f) \mathcal{M}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).$$

Demostración Claramente, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}_2} & \xrightarrow{f} & V'_{\mathcal{B}'_2} \\ i_V \downarrow & & \uparrow i_{V'} \\ V_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{f} & V'_{\mathcal{B}'_1} \end{array}$$

Es decir, $f = i_{V'} \circ f \circ i_V$. De ahí que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(i_{V'}) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(f) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(i_V)$$

y que, por consiguiente,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(f) \mathcal{M}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).$$

Corolario Si $f \in \text{End}(V)$ y \mathcal{B} y \mathcal{B}' son bases de V , el diagrama quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow{f} & V_{\mathcal{B}'} \\ i_V \downarrow & & \uparrow i_V \\ V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f} & V_{\mathcal{B}} \end{array}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

expresión que la notamos más brevemente del siguiente modo:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

4.3 Estructura de $\text{Hom}(V, V')$. El Espacio dual

Proposición 4.3.1 Consideremos el conjunto $\text{Hom}(V, V')$. Sobre él definimos las siguientes leyes de composición:

I. ADICIÓN

$$\forall f, g \in \text{Hom}(V, V'), (f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}).$$

II. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

$$\forall f \in \text{Hom}(V, V'), \forall \lambda \in K, (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

Se verifica que:

1. $(\text{Hom}(V, V'), +, \cdot K)$ es un espacio vectorial sobre K .

2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$.
 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.
3. $\dim(\text{Hom}(V, V')) = \dim(V) \times \dim(V')$.

Demostración

1. Habrá que probar en primer lugar que tanto $f + g$ como λf son aplicaciones lineales. Es decir, que las leyes de composición definidas en I y II son, respectivamente, interna y externa.

$$(a) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (f + g)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) = (f + g)(\mathbf{x}) + (f + g)(\mathbf{y}).$$

$$\forall \mathbf{x} \in V, \forall \alpha \in K, (f + g)(\alpha \mathbf{x}) = f(\alpha \mathbf{x}) + g(\alpha \mathbf{x}) = \alpha(f + g)(\mathbf{x}).$$

De donde $f + g \in \text{Hom}(V, V')$.

$$(b) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (\lambda f)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) = (\lambda f)(\mathbf{x}) + (\lambda f)(\mathbf{y}).$$

$$\forall \mathbf{x} \in V, \forall \alpha \in K, (\lambda f)(\alpha \mathbf{x}) = \lambda(f(\alpha \mathbf{x})) = \lambda(\alpha f(\mathbf{x})) = \alpha(\lambda f)(\mathbf{x}).$$

De donde deducimos, igualmente, que $\lambda f \in \text{Hom}(V, V')$.

(c) $(\text{Hom}(V, V'), +)$ tiene estructura de *grupo abeliano*. En efecto, la adición de aplicaciones definida sobre $\text{Hom}(V, V')$, verifica las propiedades *asociativa*, *conmutativa*, *tiene un elemento neutro* (la aplicación “cero”) y la aplicación $-f$, definida por $(-f)(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ es la opuesta de la aplicación f .

(d) La multiplicación de un escalar por una aplicación $f \in \text{Hom}(V, V')$, verifica trivialmente las propiedades:

- $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$.
- $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$.
- $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$.
- $1f = f$.

De todo lo anterior se deduce, que $(\text{Hom}(V, V'), +, \cdot K)$ es un espacio vectorial sobre K .

2. (a) $\forall \mathbf{x} \in V, (f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \implies \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t + \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t$,
de donde

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g).$$

- (b) $\forall \mathbf{x} \in V, (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) \implies \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t$, de donde

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

3. Para calcular la dimensión de $\text{Hom}(V, V')$, nos proponemos probar que dicho espacio vectorial es isomorfo al espacio vectorial $\mathcal{M}(m \times n, K)$ de las matrices de orden $m \times n$ sobre K , cuya dimensión es $m \times n$ y aplicar el teorema 4.1.1, en virtud del cual dos espacios vectoriales isomorfos tienen la misma dimensión.

Para ello, consideremos la aplicación

$$\Phi : \text{Hom}(V, V') \longrightarrow \mathcal{M}(m \times n, K),$$

definida por

$$\forall f \in \text{Hom}(V, V'), \Phi(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

La aplicación Φ , así definida, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Tendremos pues que probar que Φ es una aplicación lineal, inyectiva y sobreyectiva. En efecto:

- Veamos que Φ es lineal.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(f+g) &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f+g) \stackrel{(2)}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = \Phi(f) + \Phi(g) \\ \Phi(\lambda f) &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) \stackrel{(2)}{=} \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \lambda \Phi(f) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi \text{ es lineal.}$$

- $\Phi(f) = \Phi(g) \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in V, \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t \Rightarrow f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \Rightarrow f = g \Rightarrow \Phi$ es inyectiva.

- Veamos que Φ es sobreyectiva. Hay que probar que para toda matriz $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$, $\exists f \in \text{Hom}(V, V') \mid \Phi(f) = A$.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Consideremos los n vectores de V' , $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n$ cuyas coordenadas respecto de la base \mathcal{B}' de V' son, sucesivamente, las n columnas de A ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \\ \mathbf{v}'_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \\ &\vdots \\ \mathbf{v}'_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}). \end{aligned}$$

De acuerdo con la proposición 4.1.4, existe un único homomorfismo $f: V \rightarrow V'$ tal que $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}'_i$. Es claro que $\Phi(f) = A$.

De los puntos anteriores y del teorema 4.1.1, se deduce que

$$\dim(\text{Hom}(V, V')) = \dim(\mathcal{M}(m \times n, K)) = n \times m = \dim(V) \times \dim(V').$$

Nota 1 El cuerpo K puede ser considerado de forma natural como un K -espacio vectorial ya que, por una parte $(K, +)$ es grupo abeliano y, por otra, la multiplicación de elementos de K , puede ser considerada, a su vez, como una ley externa definida sobre K tomando al propio K como cuerpo de escalares. La multiplicación verifica trivialmente las cuatro propiedades que ha de cumplir la ley externa de cualquier espacio vectorial abstracto. Además, todo elemento *distinto de cero* de K es una base de dicho espacio vectorial por lo que $\dim(K) = 1$.

Nota 2 Si V es un espacio vectorial sobre dicho cuerpo K y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V , de acuerdo con lo expuesto en la nota 1, tiene perfecto sentido definir aplicaciones lineales entre los K -espacios vectoriales V y K . Veamos un ejemplo.

Sea $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Consideremos la aplicación

$$f: V \rightarrow K$$

definida por

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Claramente la aplicación está *bien definida* y es aplicación lineal de V en K .

Tiene, por tanto e igualmente, perfecto sentido considerar como bien definido el conjunto $\text{Hom}(V, K)$ de las aplicaciones lineales u homomorfismos de V en K y que da lugar al concepto de *espacio vectorial dual*.

Definición 4.3.1 ESPACIO DUAL. Llamaremos espacio dual de V y lo notaremos por V^* al conjunto de todos los homomorfismos de V en K , considerado K como un K -espacio vectorial. Es decir,

$$V^* = \text{Hom}(V, K).$$

Claramente V^* es un espacio vectorial sobre K después de lo visto en la proposición 4.3.1 y sus elementos serán notados de la forma $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \dots$, etc. y llamados formas lineales.

Proposición 4.3.2 Si V^* es el espacio vectorial de V , se verifica que

$$\dim(V^*) = \dim(V).$$

Demostración Basta tener en cuenta el punto 3 de la proposición 4.3.1 y la nota precedente ya que, en virtud de todo ello,

$$\dim(V^*) = \dim(\text{Hom}(V, K)) = \dim(V) \times \dim(K) = \dim(V).$$

Proposición 4.3.3 Sea $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ un conjunto de n aplicaciones de V en K definidas de modo que $\forall \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}) = x_i \quad (\text{coordenada } i\text{-ésima de } \mathbf{x}).$$

En particular será, por definición,

$$\mathbf{u}_i^*(\mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El conjunto \mathcal{B}^* así definido verifica que:

1. $\mathcal{B}^* \subset V^*$. Es decir, los elementos de \mathcal{B}^* son aplicaciones lineales.
2. \mathcal{B}^* es una base de V^* llamada base dual de \mathcal{B} .

Demostración

1. Es de muy fácil comprobación.
2. Como $\dim(V^*) = n$, bastará probar que \mathcal{B}^* es l.i. Partiendo de la relación

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1^* + \alpha_2 \mathbf{u}_2^* + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n^* = \mathbf{0}^*$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \mathbf{x} \in V, (\alpha_1 \mathbf{u}_1^* + \alpha_2 \mathbf{u}_2^* + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n^*)(\mathbf{x}) = 0.$$

Luego, en particular, haciendo $\mathbf{x} = \mathbf{u}_j$, se tendrá que

$$(\alpha_1 \mathbf{u}_1^* + \alpha_2 \mathbf{u}_2^* + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n^*)(\mathbf{u}_j) = 0 \implies \alpha_j = 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

de donde deducimos que \mathcal{B}^* es, efectivamente una parte libre de V^* .

Nota. Adoptaremos los siguientes convenios. En lo sucesivo:

- V y V^* serán espacios duales de dimensión n .
- $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ bases duales de V y V^* respectivamente.
- Si $\mathbf{x} \in V$, convendremos en que $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Análogamente, Si $\mathbf{x}^* \in V^*$, $\mathbf{x}_{\mathcal{B}^*}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Proposición 4.3.4 (ECUACIÓN DE UNA FORMA LINEAL). Sean

$$\mathbf{x}^* \in V^* \text{ y } \mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^n x_i^* \mathbf{u}_i^*,$$

$$\mathbf{x} \in V \text{ y } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i$$

y sea

$$x' = \mathbf{x}^*(\mathbf{x})$$

Se verifica que

$$x' = x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + \dots + x_n^* x_n. \quad (4.5)$$

La igualdad 4.5, es la ecuación de la forma lineal $\mathbf{x}^* \in V^*$ y será de suma importancia en el desarrollo de algunas demostraciones.

Demostración En efecto,

$$x' = \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \mathbf{u}_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i \right) = x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + \dots + x_n^* x_n.$$

Proposición 4.3.5 (CAMBIO DE BASE DUAL). Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bases de V y $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ y $\mathcal{C}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_n^*\}$ bases de V^* duales de \mathcal{B} y \mathcal{C} , respectivamente. Se verifica que

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^t.$$

Demostración Sean $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = A = (a_{ij})$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*) = B = (b_{ij})$ y, además,

$$\mathbf{u}_i = a_{1i} \mathbf{v}_1 + a_{2i} \mathbf{v}_2 + \dots + a_{ni} \mathbf{v}_n, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}_j^* = b_{1j} \mathbf{u}_1^* + b_{2j} \mathbf{u}_2^* + \dots + b_{nj} \mathbf{u}_n^*. \quad (4.7)$$

Por una parte,

$$\mathbf{v}_j^*(\mathbf{u}_i) \stackrel{4.6}{=} \mathbf{v}_j^*(a_{1i} \mathbf{v}_1 + a_{2i} \mathbf{v}_2 + \dots + a_{ni} \mathbf{v}_n) = a_{ji}.$$

Por otra,

$$\mathbf{v}_j^*(\mathbf{u}_i) \stackrel{4.7}{=} (b_{1j} \mathbf{u}_1^* + b_{2j} \mathbf{u}_2^* + \dots + b_{nj} \mathbf{u}_n^*)(\mathbf{u}_i) = b_{ij},$$

de donde $B = A^t$. Es decir,

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^t.$$

Definición 4.3.2 (RELACIONES DE ORTOGONALIDAD). Sean $L \subset V$ y $L^* \subset V^*$ dos variedades lineales de V y V^* , respectivamente.² Llamaremos:

- I. $\omega(L) = \{\mathbf{x}^* \in V^* \mid \forall \mathbf{x} \in L, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0\}$.
- II. $\omega(L^*) = \{\mathbf{x} \in V \mid \forall \mathbf{x}^* \in L^*, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0\}$.

Proposición 4.3.6 Sea $L \subset V$ y $L^* \subset V^*$ variedades lineales de V y de V^* , respectivamente, se verifica que:

- 1. $\omega(L)$ es una variedad lineal de V^* llamada variedad ortogonal a L
- 2. $\omega(L^*)$ es una variedad de lineal V llamada variedad ortogonal a L^* .

Demostración

- 1. Sean $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \omega(L)$ y $\alpha \in K$.
 - $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \omega(L) \implies \forall \mathbf{x} \in L, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = 0$. Por tanto, $\forall \mathbf{x} \in L, (\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x}^* + \mathbf{y}^* \in \omega(L)$.
 - $\mathbf{x}^* \in \omega(L) \implies \forall \mathbf{x} \in L, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \implies \alpha \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \implies (\alpha \mathbf{x}^*)(\mathbf{x}) = 0 \implies \alpha \mathbf{x}^* \in \omega(L)$.
- 2. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \omega(L^*)$ y $\alpha \in K$.
 - $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \omega(L^*) \implies \forall \mathbf{x}^* \in L^*, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x}^*(\mathbf{y}) = 0$. De aquí que $\forall \mathbf{x}^* \in L^*, \mathbf{x}^*(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^*(\mathbf{y}) = 0 \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \omega(L^*)$.
 - $\mathbf{x} \in \omega(L^*) \implies \forall \mathbf{x}^* \in L^*, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \implies \alpha \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x}^*(\alpha \mathbf{x}) = 0 \implies \alpha \mathbf{x} \in \omega(L^*)$.

Proposición 4.3.7 Sea L la variedad lineal de V , $L = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \rangle$ y $(\mathbf{a}_i)_B = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ ($i = 1, \dots, r$), entonces unas ecuaciones implícitas de $\omega(L)$ vienen dadas por el sistema

$$\omega(L) \equiv \begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \dots + a_{n1}x_n^* = 0 \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + \dots + a_{n2}x_n^* = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1^* + a_{2r}x_2^* + \dots + a_{nr}x_n^* = 0 \end{cases}$$

Demostración Sea $\mathbf{x}^* \in \omega(L)$ y $\mathbf{x}_B^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

$$\mathbf{x}^* \in \omega(L) \iff \forall \mathbf{x} \in L, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x}^*(\mathbf{a}_i) = 0, (i = 1, \dots, r)$$

\Updownarrow Ec. 4.5

$$a_{1i}x_1^* + a_{2i}x_2^* + \dots + a_{ni}x_n^* = 0, (i = 1, \dots, r)$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \dots + a_{n1}x_n^* = 0 \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + \dots + a_{n2}x_n^* = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1^* + a_{2r}x_2^* + \dots + a_{nr}x_n^* = 0 \end{cases}$$

²En realidad, no es necesario que L y L^* sean variedades lineales, basta con que sean subconjuntos no vacíos de V y V^* , sin embargo para no crear confusiones innecesarias, consideraremos sólo variedades lineales de V .

Corolario Obviamente, si A es la matriz de los coeficientes del sistema $\omega(L)$, es claro que

$$\dim(\omega(L)) = \dim(V) - \text{rg}(A) = \dim(V) - \dim(L)$$

Proposición 4.3.8 En las condiciones de la proposición anterior, si $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_s^*\}$, ($s = n - r$) es una base del espacio de las soluciones de $\omega(L)$ se verifica que

$$L \equiv \begin{cases} \alpha_{11}^* x_1 + \alpha_{21}^* x_2 + \dots + \alpha_{n1}^* x_n = 0 \\ \alpha_{12}^* x_1 + \alpha_{22}^* x_2 + \dots + \alpha_{n2}^* x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{1s}^* x_1 + \alpha_{2s}^* x_2 + \dots + \alpha_{ns}^* x_n = 0 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones implícitas independientes de L .

Demostración Sean A y A^* las matrices de los coeficientes del sistema $\omega(L)$ y L , respectivamente. Por hipótesis $\text{rg}(A) = r$ y $\text{rg}(A^*) = s$. Bastará ver que \mathbf{a}_i^* es solución del sistema L , lo cual es evidente. En efecto, por ser α_i solución de $\omega(L)$, se verificará que

$$\forall i = 1, \dots, r, A(\alpha_i)^t = 0 \implies A(A^*)^t = 0 \implies A^* A^t = 0 \implies A^*(\mathbf{a}_i)^t = 0, \forall i = 1, \dots, r.$$

Igualdad, esta última, que nos indica que \mathbf{a}_i es solución de L . Es claro, además, que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es una base de las soluciones de L . Por una parte son l.i. ($\text{rg}(A) = r$) y, por otra, $\dim(L) = n - s = n - (n - r) = r$.

Proposición 4.3.9 Sea L una variedad lineal de V y sea

$$S_L \equiv \begin{cases} a_{11}^* x_1 + a_{21}^* x_2 + \dots + a_{n1}^* x_n = 0 \\ a_{12}^* x_1 + a_{22}^* x_2 + \dots + a_{n2}^* x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}^* x_1 + a_{2r}^* x_2 + \dots + a_{nr}^* x_n = 0 \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones implícitas independientes de L . Consideremos los r vectores $\mathbf{a}_i^* \in V^*$ cuyas coordenadas son los coeficientes de S_L :

$$(\mathbf{a}_i^*)_{B^*} = (a_{1i}^*, a_{2i}^*, \dots, a_{ni}^*), (i = 1, \dots, r)$$

Se verifica que

$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \dots, \mathbf{a}_r^*\}, \text{ es una base de } \omega(L).$$

Demostración Sea A^* la matriz de los coeficientes de S_L . Desde luego \mathcal{C}^* es l.i. por ser $\text{rg}(A^*) = r$. Además $\mathbf{a}_i^* \in \omega(L)$ ya que $\forall \mathbf{x} \in L$, $\mathbf{a}_i^*(\mathbf{x}) = 0$, ($i = 1, \dots, r$) no son más que las ecuaciones de S_L . Bastará pues probar que $\dim(\omega(L)) = r$, lo cual es evidente ya que

$$\dim(\omega(L)) = \dim(V) - \dim(L) = \dim(V) - \dim(V) + \text{rg}(A^*) = r.$$

Nota. Cada una de las proposiciones anteriores puede ser enunciada de forma similar para el espacio dual correspondiente. Basta considerar en cada caso las variedades L^* u $\omega(L^*)$.

Proposición 4.3.10 (PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DE ORTOGONALIDAD). Sean L , L_1 y L_2 variedades lineales de V y L^* , L_1^* y L_2^* variedades lineales de V^* , Se verifica que:

1. $L_1 \subset L_2 \implies \omega(L_2) \subset \omega(L_1)$. 1*. $L_1^* \subset L_2^* \implies \omega(L_2^*) \subset \omega(L_1^*)$.
2. $\omega(L_1 + L_2) = \omega(L_1) \cap \omega(L_2)$. 2*. $\omega(L_1^* + L_2^*) = \omega(L_1^*) \cap \omega(L_2^*)$.
3. $\omega(L_1 \cap L_2) = \omega(L_1) + \omega(L_2)$. 3*. $\omega(L_1^* \cap L_2^*) = \omega(L_1^*) + \omega(L_2^*)$.
4. $L = \omega(\omega(L))$. 4*. $L^* = \omega(\omega(L^*))$.

Demostración

$$1. \mathbf{x}^* \in \omega(L_2) \implies \forall \mathbf{x} \in L_2, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \xrightarrow{L_1 \subset L_2} \forall \mathbf{x} \in L_1, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x}^* \in \omega(L_1).$$

2.

$$\left[\begin{array}{l} L_1 \subset L_1 + L_2 \implies \omega(L_1 + L_2) \subset \omega(L_1) \\ L_1 \subset L_1 + L_2 \implies \omega(L_1 + L_2) \subset \omega(L_2) \end{array} \right\} \implies \omega(L_1 + L_2) \subset \omega(L_1) \cap \omega(L_2).$$

$$\left[\supset \right] \mathbf{x}^* \in \omega(L_1) \cap \omega(L_2) \implies \mathbf{x}^* \in \omega(L_1), \mathbf{x}^* \in \omega(L_2) \implies \forall \mathbf{x}_1 \in \omega(L_1), \forall \mathbf{x}_2 \in \omega(L_2), \mathbf{x}^*(\mathbf{x}_1) = 0, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}_2) = 0.$$

Sea pues $\mathbf{x} \in L_1 + L_2 \implies \exists \mathbf{x}_1 \in L_1, \exists \mathbf{x}_2 \in L_2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Por consiguiente, teniendo en cuenta lo anterior, será

$$\forall \mathbf{x} \in L_1 + L_2, \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}^*(\mathbf{x}_2) = 0.$$

3.

$$\left[\supset \right] \left[\begin{array}{l} L_1 \cap L_2 \subset L_1 \implies \omega(L_1) \subset \omega(L_1 \cap L_2) \\ L_1 \cap L_2 \subset L_2 \implies \omega(L_2) \subset \omega(L_1 \cap L_2) \end{array} \right\} \implies \omega(L_1) + \omega(L_2) \subset \omega(L_1 \cap L_2).$$

Por otra parte,

$$\dim(\omega(L_1) + \omega(L_2)) = \dim(\omega(L_1)) + \dim(\omega(L_2)) - \dim(\omega(L_1) \cap \omega(L_2)) \stackrel{(2)}{=} n - \dim(L_1) + n - \dim(L_2) - \dim(\omega(L_1 + L_2)) = 2n - \dim(L_1) - \dim(L_2) - n + \dim(L_1 + L_2) = n - \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(\omega(L_1 \cap L_2)).$$
 De donde deducimos la igualdad.

4. Tengamos en cuenta que

$$\omega(\omega(L)) = \{\mathbf{x} \in V \mid \forall \mathbf{x}^* \in \omega(L), \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (4.8)$$

$$\left[\subset \right] \mathbf{x} \in L \implies \forall \mathbf{x}^* \in \omega(L), \mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = 0 \xrightarrow{4.8} \mathbf{x} \in \omega(\omega(L)).$$

Por otra parte,

$$\dim(\omega(\omega(L))) = \dim(V) - \dim(\omega(L)) = \dim(V) - (\dim(V) - \dim(L)) = \dim(L).$$

De ambos resultados, se deduce la igualdad.

Nota. Análogas demostraciones para las propiedades 1*, 2*, 3* y 4*.

Ejemplo. Sean V y V^* espacios vectoriales duales sobre K de dimensión 5 y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$, $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{u}_4^*, \mathbf{u}_5^*\}$ bases duales de V y V^* , respectivamente.

Si $L = \langle (1, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0) \rangle$, calcular:

1. $\dim(\omega(L))$.
2. Un sistema de ecuaciones implícitas independientes de $\omega(L)$, respecto de la base \mathcal{B}^* .
3. un sistema de ecuaciones implícitas independientes de L , respecto de \mathcal{B} .
4. Las coordenadas respecto de \mathcal{B}^* , de la aplicación

$$\mathbf{x}^* : V \longrightarrow K$$

definida por

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5, \text{ siendo } \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_5)$$

Solución. $A = \{(1, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0)\}$ es una base de L ya que $\text{rg}(A_{\mathcal{B}}) = 3$. Por consiguiente:

1. $\dim(\omega(L)) = 5 - 3 = 2$.
2. Un sistema de ecuaciones implícitas de $\omega(L)$ viene dado por el sistema

$$\omega(L) \equiv \begin{cases} x_1^* & + x_4^* + x_5^* = 0 \\ x_1^* + x_2^* & + x_5^* = 0 \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* & = 0 \end{cases}$$

3. Calculemos una base de las soluciones de $\omega(L)$. El sistema anterior es equivalente al siguiente:

$$\omega(L) \equiv \begin{cases} x_1^* & = -x_4^* - x_5^* \\ x_1^* + x_2^* & = -x_5^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* & = 0 \end{cases}$$

Dando los valores canónicos a las incógnitas x_4^*, x_5^* obtenemos la base de $\omega(L)$,

$$\{(-1, 1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 1)\}.$$

Por consiguiente,

$$L \equiv \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Observación. Nótese que los coeficientes de $\omega(L)$ constituyen una base de L , con lo que L podría haberse calculado, igualmente, por el método del menor orlado.

4. Es evidente que $\mathbf{x}_{\mathcal{B}^*}^* = (1, 2, 3, 4, 5)$.

