

Tema 7

Formas canónicas de matrices cuadradas

Sea K un cuerpo.

Si V y V' son K -espacios vectoriales, $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal, B y C bases de V y B' y C' bases de V' , entonces

$$M_B^{B'}(f) = M_{C'}^{B'}(id_{V'}) * M_C^{C'}(f) * M_B^C(id_V).$$

Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita, B es una base de V y f es un endomorfismo de V , denotaremos por $M_B(f)$ a la matriz $M_B^B(f)$ asociada a f respecto a la base B . Si C es otra base de V , entonces

$$M_B(f) = M_C^B(id_V) * M_C(f) * M_B^C(id_V),$$

y si llamamos P a $M_B^C(id_V)$, entonces $P^{-1} = M_C^B(id_V)$ y por lo tanto $M_B(f) = P^{-1} * M_C(f) * P$.

A lo largo de este tema, el objetivo es buscar una base C de V de manera que $M_C(f)$ sea lo más sencilla posible (lo idóneo es que sea diagonal), porque de esa manera es más fácil, por ejemplo, calcular potencias de $M_B(f)$ o evaluar un polinomio en $M_B(f)$.

1. Valores y vectores propios

(1.1) Sea V un K -espacio vectorial y f un endomorfismo de V . Un elemento $\lambda \in K$ se dice que es un *valor propio*, o también que es un *autovalor* de f , si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $f(v) = \lambda v$. A un tal vector v se le denomina *vector propio* (o *autovector*) asociado al autovalor λ .

(1.2) El conjunto de autovalores del endomorfismo f , que se denota por $\sigma(f)$, se denomina *espectro* de f .

Dado un autovalor λ de f , el conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial no nulo de V , que se denomina *subespacio propio* asociado al autovalor λ y se denota por V_λ .

(1.3) El subespacio propio asociado al autovalor λ coincide con el núcleo del endomorfismo $f - \lambda id_V$. Por eso las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1.3.1) λ es un autovalor de f ;
- (1.3.2) el endomorfismo $f - \lambda id_V$ no es inyectivo;
- (1.3.3) $\det(A - \lambda I_n) = 0$, donde $A = M_B(f)$.

(1.4) Sea A la matriz asociada al endomorfismo f del K -espacio vectorial V de dimensión n respecto de una base B .

Si desarrollamos el determinante de $A - xI_n$ obtenemos un polinomio

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

cuyo término de mayor grado es $(-1)^n$, cuyo término independiente es $\det A$ y cuyo término de grado $n-1$ es $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$. A ese polinomio se le llama *polinomio característico* de la matriz A (o del endomorfismo f), y se denota por $p_A(x)$ (o por $p_f(x)$).

Las soluciones de la ecuación $p_f(x) = 0$ son exactamente los autovalores de f . A esta ecuación se le llama ecuación característica de f .

El polinomio característico de f es independiente de la matriz $A = M_B(f)$ asociada a f que se elija para calcularlo, puesto que si $A' = M_C(f)$, siendo C otra base de f , entonces $A = P^{-1} * A' * P$, donde $P = M_B^C(id_V)$. Luego

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI_n) \\ &= \det(P^{-1} * A' * P - xP^{-1} * P) \\ &= \det(P^{-1} * (A' - xI_n) * P) \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(A' - xI_n) \cdot \det P = p_{A'}(x). \end{aligned}$$

(1.5) Si $A \in M_n(K)$, a las soluciones (en K) de la ecuación $p_A(x) = 0$ se les denomina *autovalores de A* .

Dado que una ecuación de grado n tiene a lo sumo n soluciones, el número de autovalores de la matriz A o del endomorfismo f es menor o igual que n , donde $n \times n$ es el tamaño de A y n es la dimensión de V .

2. Diagonalizabilidad

(2.1) Un endomorfismo f de un K -espacio vectorial V de dimensión finita se dice que es *diagonalizable* si existe una base B de V de tal manera que la matriz asociada a f respecto de B es una matriz diagonal.

Una matriz $A \in M(K)$ se dice que es *diagonalizable* si existe una matriz diagonal D semejante a A .

(2.2) Sea $p(x) \in K[x]$. Se llama *orden de multiplicidad* de una solución α la ecuación $p(x) = 0$ al mayor número natural o tal que $(x - \alpha)^o$ divide a $p(x)$.

(2.3) Teorema. (Criterio de diagonalizabilidad). Sea f un endomorfismo del K -espacio vectorial V de dimensión n . Entonces f es diagonalizable si, y sólo si:

(2.3.1) la ecuación característica $p_f(x) = 0$ tiene todas sus soluciones en K , o sea, si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son las soluciones de $p_f(x) = 0$ en K , entonces

$$o(\lambda_1) + \dots + o(\lambda_s) = n;$$

(2.3.2) y la dimensión $\dim V_{\lambda_i}$ de cada subespacio propio coincide con el orden de multiplicidad $o(\lambda_i)$ del autovalor λ_i correspondiente.

En ese caso, si B_i es una base del subespacio propio V_{λ_i} para $1 \leq i \leq s$, entonces la unión $B = \bigcup_{i=1}^s B_i$ es una base de V y la matriz asociada a f respecto a esa base es diagonal.

(2.4) En general, si λ es un autovalor de f y $o = o(\lambda)$ es su orden de multiplicidad como solución de $p_f(x) = 0$, entonces

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq o.$$

En efecto, dado que λ es un autovalor de f , existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, esto es, tal que $v \in V_\lambda$, luego $\dim V_\lambda > 0$.

Por otra parte, si d es la dimensión de V_λ , entonces toda base de V_λ tiene d vectores. Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V_λ y e_{d+1}, \dots, e_n vectores de V tales que $B = \{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$ es una base de V . Dado que $f(e_i) = \lambda e_i$ para $i \in \{1, \dots, d\}$, la matriz asociada a f respecto a B es

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1 \ d+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & a_{2 \ d+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{d \ d+1} & \cdots & a_{dn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{d+1 \ d+1} & \cdots & a_{d+1 \ n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n \ d+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \det(A - xI_n) \\ &= (\lambda - x)^d \det \begin{pmatrix} a_{d+1 \ d+1} - x & \cdots & a_{d+1 \ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n \ d+1} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego $d \leq o$, puesto que o es el mayor entero tal que $(x - \lambda)^o$ divide a $p_f(x)$.

(2.5) Como consecuencia, si V es un K -espacio vectorial de dimensión n y $f : V \rightarrow V$ es un endomorfismo de manera que $p_f(x)$ tiene n soluciones $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ distintas entre sí (y por lo tanto de multiplicidad 1 cada una de ellas), entonces f es diagonalizable, porque al ser $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq o(\lambda_i) = 1$, se tiene que

$$\dim V_{\lambda_i} = o(\lambda_i) = 1$$

para cada i .

