

Fundamentos Matemáticos de la Informática II  
Ejercicios

**Hoja 3 - Congruencia, Grupos**

1. Sea  $A$  un conjunto y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una partición de  $A$ . Comprobar que la relación binaria definida entre los elementos de  $A$

$$a R b \Leftrightarrow \exists i \in I, a, b \in A_i$$

es una relación de equivalencia.

Demostrar que el conjunto cociente  $A/R$  es  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

2. Demostrar que un número entero positivo  $n$  es múltiplo de 9 si, y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9 (sugerencia: si los dígitos de  $n$  son  $a_r a_{r-1} \dots a_0$ , entonces  $n = \sum_{i=0}^r a_i 10^i$ ).
3. Demostrar que un número entero positivo  $n$  es múltiplo de 3 si, y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
4. Demostrar que un número entero positivo  $n$  es múltiplo de 11 si, y sólo si la suma de los dígitos de  $n$  en lugares pares menos la suma de los dígitos en los lugares impares es un múltiplo de 11.
5. Demostrar que  $S = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}, (a, b) \neq (0, 0)\}$  es un grupo con la operación producto de números complejos.
6. Comprobar:
- a)  $U = \{1, -1, i, -i\}$  es un subgrupo del grupo multiplicativo  $\mathbb{C} - \{0\}$ .
  - b) Si  $m$  es un entero positivo, entonces  $H_m = \{\bar{a} : \text{m.c.d.}(a, m) = 1\}$  es un grupo con la operación  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ .
  - c) Existe un isomorfismo de grupos entre  $U$  y  $H_5$ .
  - d) Existe un isomorfismo de grupos entre  $H_5$  y el grupo  $\mathbb{Z}_4$  con la operación suma.
7. Si  $n$  es un entero positivo, denotemos por  $U_n$  al conjunto de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, esto es, al conjunto de los números complejos  $z$  tales que  $z^n = 1$ .  
Comprobar que  $U_n$  es un grupo con la operación multiplicación de números complejos, pero en general no con la suma (el grupo del primer apartado del ejercicio 6 es  $U_4$ ).
8. Determinar si las siguientes aplicaciones son o no homomorfismos de grupos:
- a)  $f : (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) ; x \longmapsto |x|$ .
  - b)  $f : (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) ; x \longmapsto x^2$ .
  - c)  $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) ; x \longmapsto e^x$ .
  - d)  $f : (\mathbb{Z}_3, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_3, +) ; x \longmapsto x + \bar{1}$ .
9. Comprobar que  $f : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) ; a + ib \longmapsto a - b$  es un homomorfismo de grupos. Calcular el núcleo y la imagen de  $f$ . Determinar si  $f$  es monomorfismo y/o epimorfismo.