

Tema 4

Espacios vectoriales

A lo largo de este tema, K será un cuerpo.

1. Espacios vectoriales

(1.1) Un espacio vectorial sobre el cuerpo K (o K -espacio vectorial) es un grupo abeliano $(V, +, 0)$ junto con una aplicación (ley de composición externa) $\cdot : K \times V \rightarrow V$ que satisface las siguientes propiedades:

(1.1.1) (distributiva derecha) $\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$ para cualesquiera $\lambda \in K$ y $u, v \in V$;

(1.1.2) (distributiva izquierda) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in K$ y $v \in V$;

(1.1.3) (unitariedad) $1 \cdot v = v$ para cualquier $v \in V$;

(1.1.4) (asociativa mixta) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in K$ y $v \in V$.

(1.2) Ejemplos.

- Sea $n > 0$. El conjunto $K^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in K, \forall 1 \leq i \leq n\}$ es un K -espacio vectorial con la suma de vectores

$$\begin{aligned} + : \quad K^n \times K^n &\longrightarrow K^n \\ (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) &\longmapsto (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \end{aligned}$$

y la ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : \quad K \times K^n &\longrightarrow K^n \\ \lambda, (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n). \end{aligned}$$

- El conjunto \mathbb{C} de los números complejos, además de ser un \mathbb{C} -espacio vectorial (es \mathbb{C}^1 con $K = \mathbb{C}$ en el ejemplo anterior), también es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma de números complejos y el producto de números reales por números complejos usual.

En general, si K y L son cuerpos y $K \subseteq L$, entonces L (y de hecho cualquier L -espacio vectorial V) es un K -espacio vectorial.

- El conjunto $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma usual de polinomios y la ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ \lambda, p(x) &\longmapsto \lambda \cdot p(x) = \lambda a_n x^n + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0, \\ &\text{siendo } p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

- Si n es un número natural, el conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ formado por todos los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a n es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma de polinomios y la ley de composición externa definida como en el ejemplo anterior.
- El conjunto \mathcal{S} de las sucesiones $(a_i)_{i \geq 0}$ de términos reales es un \mathbb{R} -espacio vectorial con la suma de sucesiones

$$\begin{aligned} + : \mathcal{S} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (a_i)_{i \geq 0}, (b_i)_{i \geq 0} &\longmapsto (a_i)_{i \geq 0} + (b_i)_{i \geq 0} = (c_i)_{i \geq 0}, \quad c_i = a_i + b_i \quad \forall i \geq 0 \end{aligned}$$

y la ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ \lambda, (a_i)_{i \geq 0} &\longmapsto \lambda \cdot (a_i)_{i \geq 0} = (d_i)_{i \geq 0}, \quad d_i = \lambda a_i \quad \forall i \geq 0. \end{aligned}$$

(1.3) Si V es un K -espacio vectorial, entonces

(1.3.1) $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$, porque $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$, con lo que

$$0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v - 0 \cdot v = 0;$$

(1.3.2) $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in K$, porque $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$, con lo que

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 - \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 - \lambda \cdot 0 = 0;$$

(1.3.3) $-1 \cdot v = -v$ (el opuesto de v) para todo $v \in V$, porque

$$-1 \cdot v + v = (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0, \quad v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0.$$

2. Subespacios

(2.1) Sea V un K -espacio vectorial. Un *subespacio vectorial* de V es un subconjunto $W \subseteq V$ de manera que W es un espacio vectorial con la suma de vectores de V y con el producto de escalares por vectores de V .

Si W es un subespacio vectorial de V , también es un subgrupo de $(V, +, 0)$.

(2.2) Ejemplos.

- Si V es un K -espacio vectorial, entonces $\{0\}$ y el propio V son subespacios vectoriales de V . Al subespacio $\{0\}$ se le denota también por 0 . El subespacio 0 está contenido en cualquier subespacio de V .

- Sean $m \leq n$ enteros positivos. Entonces el conjunto

$$W = \{(a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0) : a_1, \dots, a_m \in K\}$$

es un subespacio vectorial de K^n .

- Sea n un número natural. El \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ es un subespacio vectorial del \mathbb{R} -espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}[x]$.

(2.3) Para comprobar que un subconjunto W de un K -espacio vectorial V es un subespacio vectorial, se puede utilizar la siguiente caracterización: Un subconjunto $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V si, y sólo si

(2.3.1) $W \neq \emptyset$;

(2.3.2) $w + w' \in W$ para cualesquiera $w, w' \in W$;

(2.3.3) $\lambda \cdot w \in W$ para todo $\lambda \in K$ y todo $w \in W$.

3. Intersección y suma de subespacios

(3.1) Si W y W' son subespacios vectoriales del K -espacio vectorial V , entonces $W \cap W'$ también es un subespacio vectorial de V . En efecto,

(3.1.1) $0 \in W \cap W'$ porque $0 \in W$ y $0 \in W'$. Luego $W \cap W' \neq \emptyset$.

(3.1.2) Si $u, v \in W \cap W'$, entonces $u + v \in W$ y $u + v \in W'$, puesto que ambos son subespacios vectoriales. Luego $u + v \in W \cap W'$.

(3.1.3) Si $\lambda \in K$ y $w \in W \cap W'$, entonces $\lambda \cdot w \in W$ y $\lambda \cdot w \in W'$, porque ambos son subespacios vectoriales. Luego $\lambda \cdot w \in W \cap W'$.

(3.2) Sin embargo, la unión de dos espacios vectoriales W y W' de V no es en general un subespacio vectorial de V . Por ejemplo, si $V = K^2$ y consideramos los subespacios

$$W = \{(a, 0) : a \in K\}, \quad W' = \{(0, b) : b \in K\},$$

entonces $(1, 0), (0, 1) \in W \cup W'$ porque $(1, 0) \in W$ y $(0, 1) \in W'$, y sin embargo $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W \cup W'$.

(3.3) Sea F un conjunto de vectores del K -espacio vectorial V . Entonces el conjunto

$$\mathcal{V}(F) = \{v \in V : \exists n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, v_1, \dots, v_n \in F, v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n\}$$

es un subespacio vectorial de V . En efecto,

(3.3.1) el vector cero pertenece a $\mathcal{V}(F)$, porque $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $n = 0$. Luego $\mathcal{V}(F) \neq \emptyset$;

(3.3.2) si $v, v' \in \mathcal{V}(F)$, entonces existen $v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_m \in F$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ y $v' = \lambda'_1 v'_1 + \dots + \lambda'_m v'_m$, así que $v + v' \in \mathcal{V}(F)$ porque

$$v + v' = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda'_1 v'_1 + \dots + \lambda'_m v'_m;$$

(3.3.3) si $\lambda \in K$ y $v \in \mathcal{V}(F)$, entonces $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ con $v_1, \dots, v_n \in F$. Luego $\lambda v \in \mathcal{V}(F)$, porque

$$\lambda v = \lambda \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda \lambda_n v_n.$$

A $\mathcal{V}(F)$ se le conoce como *subespacio generado* por el conjunto F .

Se tiene que $F \subseteq \mathcal{V}(F)$, porque cada $v \in F$ es de la forma $v = \lambda_1 v_1$, con $\lambda_1 = 1 \in K$ y $v_1 = v \in F$. Además, $\mathcal{V}(F)$ es el menor subespacio de V que contiene a F , es decir, si W es un subespacio vectorial de V y $F \subseteq W$, entonces $\mathcal{V}(F) \subseteq W$. Esto es así porque si $v \in \mathcal{V}(F)$, entonces $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, con $\lambda_i \in K$ y $v_i \in F \subseteq W$ para cada i , y por ser W un subespacio vectorial, eso implica que $v \in W$.

Un vector de la forma $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ se dice que es una *combinación lineal* de v_1, \dots, v_n .

(3.4) Sean W y W' subespacios vectoriales de V . La unión $W \cup W'$ no es, en general, un subespacio de V .

Se llama *subespacio suma* de W y W' , y se denota por $W + W'$, al subespacio $\mathcal{V}(W \cup W')$.

El subespacio $W + W'$ es el menor subespacio que contiene a W y a W' .

4. Bases y dimensión

(4.1) Sea V un K -espacio vectorial. Un conjunto de vectores $G \subseteq V$ se dice que es un *sistema generador* de V si para cada vector $v \in V$ existen $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ y $v_1, \dots, v_n \in G$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, o equivalentemente, si $\mathcal{V}(G) = V$.

Por ejemplo, el conjunto

$$G = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, -1)\}$$

es un sistema generador de \mathbb{R}^3 , puesto que para cualquier vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$(a, b, c) = 2a(1, -1, 0) + (2a + b)(0, 1, -1) + a(-1, 0, 1) + (-a - b - c)(0, 0, -1).$$

(4.2) Un conjunto de vectores L del K -espacio vectorial V se dice que es un *sistema libre* o *linealmente independiente* si para cualesquiera $v_1, \dots, v_n \in L$ distintos, con $n > 0$, la única forma de que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ es que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , el conjunto

$$L = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

es un sistema libre, porque si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

entonces $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = 0$, y esto sólo es posible cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(4.3) Sea V un k -espacio vectorial. Se dice que un conjunto de vectores $B \subseteq V$ es una *base de V* si para cualquier vector v de V existe un único número natural n , unos únicos escalares no nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y unos únicos $v_1, \dots, v_n \in B$ distintos tales que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

(4.4) Ejemplos.

(4.4.1) El conjunto de vectores

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

es una base del K -espacio vectorial $V = K^n$ que se denomina *base canónica* de K^n .

(4.4.2) El conjunto

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots\} = \{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

es una base del \mathbb{R} espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}[x]$, y se denomina base canónica.

(4.4.3) Sea n un entero positivo y sea $V = \mathbb{R}_n[x]$ el \mathbb{R} -espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n . El conjunto

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$$

es una base de V .

(4.5) Se conviene en que la base del espacio vectorial nulo $\{0\}$ es el conjunto vacío.

(4.6) Un conjunto de vectores B del K -espacio vectorial V es una base de V si, y sólo si, B es una sistema libre y generador de V .

En efecto, si B es una base de V , entonces es un sistema generador, pues cada vector de V es combinación lineal de vectores de B . Además, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ y $v_1, \dots, v_n \in B$ son tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$, entonces $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, dado que el vector cero se expresa como una combinación lineal de cero elementos de B , y además de forma única, luego B es un sistema libre.

Recíprocamente, si B es un sistema libre y generador de V , entonces por una parte para todo vector $v \in V$ existe $n \in \mathbb{N}$, unos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que podemos tomar no nulos y $v_1, \dots, v_n \in B$ distintos tales que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Si existe otro $m \in \mathbb{N}$, otros escalares μ_1, \dots, μ_m no nulos y $u_1, \dots, u_m \in B$ distintos tales que $v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_m u_m$, entonces

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - \mu_1 u_1 - \dots - \mu_m u_m = 0.$$

Esto implica que $\{v_i\}_{i=1}^n = \{u_j\}_{j=1}^m$, porque si $v_i \notin \{u_j\}_{j=1}^m$ (resp. $\mu_j \notin \{v_i\}_{i=1}^n$) entonces, por ser B un sistema libre, el escalar λ_i (resp. μ_j) es cero, y los hemos tomado no nulos. Luego $m = n$ y podemos asumir que $v_i = u_i$ para $1 \leq i \leq n$ (si no, reindexamos $\{u_j\}_{j=1}^m$).

Tenemos entonces que $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$, y por ser B un sistema libre, esto implica que $\lambda_i - \mu_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o sea los escalares en la expresión de v como combinación lineal de vectores de B también son únicos

(4.7) Teorema. (de Hamel). *Todo espacio vectorial V distinto de $\{0\}$ admite una base.*

El teorema de Hamel es consecuencia del siguiente resultado.

(4.8) Teorema. (de la base incompleta). *Sea V un K -espacio vectorial, L un sistema libre de V y G un sistema generador de V que contiene a L . Entonces existe una base B de V de tal manera que $L \subseteq B \subseteq G$.*

Demostración. Sea \mathcal{L} el conjunto de sistemas libres de V que contienen a L y están contenidos en G .

El conjunto \mathcal{L} es no vacío, puesto que $L \in \mathcal{L}$. La inclusión es una relación de orden entre los elementos de \mathcal{L} , y ordenado de esa manera, \mathcal{L} es un conjunto inductivo, pues si

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots$$

es una cadena ascendente de sistemas libres de V tales que $L \subseteq L_i \subseteq G$ para todo i , entonces $L' = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ también contiene a L , está contenido en G y es libre. En efecto, sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ y $v_1, \dots, v_n \in L'$ tales que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. Como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe m_i tal que $v_i \in L_{m_i}$, podemos afirmar que $v_i \in L_m$, donde $m = \max\{m_i\}_{i=1}^n$, y puesto que L_m es un sistema libre, tenemos que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

El lema de Zorn garantiza que \mathcal{L} admite (al menos) un elemento maximal B .

Veamos que todos los vectores de G se pueden expresar como combinación lineal de vectores de B , y por tanto B también es un sistema generador de V . Supongamos que no es así, sino que por el contrario existe un vector $v \in G$ (que por fuerza tiene que ser no nulo y no perteneciente a B) tal que v no puede ser expresado como combinación lineal de elementos de B . Entonces el sistema $B \cup \{v\}$ es un sistema libre que contiene a L y está contenido en G . En efecto, si $B \cup \{v\}$ no es libre, entonces existen $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ no todos nulos y $v_1, \dots, v_n \in B$ tales que $\lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. Además $\lambda \neq 0$, pues si fuese cero, entonces $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ por ser B un sistema libre. Luego

$$v = -\lambda^{-1}\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda^{-1}\lambda_n v_n,$$

lo que contradice que v no se pueda expresar como combinación lineal de elementos de B .

Hemos encontrado por tanto un sistema libre $B \cup \{v\}$ que contiene a L , que está contenido en G y que contiene estrictamente a B , lo que está en contradicción con la maximalidad de este último.

La contradicción proviene de suponer que no todo vector de G se puede expresar como combinación lineal de vectores de B . \square

(4.9) Nota. Como se ha visto en la demostración del teorema anterior, un sistema libre maximal en un espacio vectorial es una base. Recíprocamente, toda base es un sistema libre maximal.

El resultado anterior puede ser probado considerando un elemento minimal B del conjunto (inductivo y no vacío) de sistemas generadores de V que contienen a L y están contenidos en G . De esta manera se puede deducir que un sistema generador minimal en un espacio vectorial es una base. Recíprocamente, toda base es un sistema generador minimal.

(4.10) Teorema. (de equipotencia de las bases). Sea V un K -espacio vectorial. Si B y B' son bases de V , entonces B y B' tienen el mismo cardinal.

Demostración. Distinguiremos dos casos:

- Supongamos que los cardinales de B y B' son finitos, y más concretamente, que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Como B' es un sistema generador de V , el vector (no nulo) v_1 es combinación lineal de vectores de B' , en la que no todos los escalares son nulos. Sea v' un vector de B' que aparece (acompañado de un escalar no nulo) en una expresión de v_1 como combinación lineal de vectores de B' . El conjunto de vectores B'_1 que resulta de sustituir v' por v_1 en B' es de nuevo un sistema generador de V , puesto que v' se puede expresar como una combinación lineal de v_1 y vectores de $B' \setminus \{v'\}$.

Por lo tanto el vector (no nulo) v_2 se puede expresar como combinación lineal de vectores de B'_1 en la que hay algún vector (que podemos tomar distinto de v_1 , puesto que B es un sistema libre) acompañado de un escalar no nulo. Sustituyendo dicho vector por v_2 en B'_1 se obtiene un nuevo sistema B'_2 generador de V .

Repetiendo este proceso se van obteniendo sistemas B'_i generadores de V que tienen el mismo cardinal que B' y que contienen a $\{v_1, \dots, v_i\}$. Al cabo de n sustituciones obtenemos un sistema generador B'_n que contiene a la base B y cuyo cardinal coincide con el de B' , luego $|B| \leq |B'|$.

De la misma manera, puesto que el cardinal de B' es finito, $|B'| \leq |B|$, de donde se concluye que $|B| = |B'|$.

- Supongamos que el cardinal de alguna de las dos bases, pongamos de B , es no finito. Entonces el cardinal de B' no puede ser finito, pues si lo fuese (por ejemplo $|B'| = n$) entonces se podrían construir sistemas generadores B'_i , para $i = 1, \dots, n$, con el mismo cardinal que B' sustituyendo vectores de B' por vectores de B , hasta haber sustituido, al cabo de un número finito de pasos, todos los vectores de B' . Por lo tanto tendríamos un sistema B'_n generador de V y contenido estrictamente en B , lo que contradice el hecho de que una base es un sistema generador minimal.

Sea I un conjunto de índices para los vectores de B . Puesto que B es un sistema generador, para cada $v' \in B'$ existe una parte finita $J_{v'}$ de I y unos escalares $\{\lambda_i^{v'}\}_{i \in J_{v'}}$ de manera que $v' = \sum_{i \in J_{v'}} \lambda_i^{v'} v_i$.

Se tiene que $\bigcup_{v' \in B'} J_{v'} = I$, pues si $i \in I$ e $i \notin \bigcup_{v' \in B'} J_{v'}$, entonces todo vector de B' se puede expresar como combinación lineal de vectores de $B \setminus \{v_i\}$, de donde se tiene que $B \setminus \{v_i\}$ es un sistema generador de V estrictamente contenido en la base B — una contradicción.

Luego

$$|B| = |I| = \left| \bigcup_{v' \in B'} J_{v'} \right| \leq |B'| \cdot \aleph_0 = |B'|.$$

De manera similar $|B'| \leq |B|$, de donde se obtiene que $|B| = |B'|$. □

(4.11) Sea V un K -espacio vectorial. Se llama *dimensión* de V , y se denota por $\dim_K V$, al cardinal de una base de V .

Para calcular la dimensión de un espacio vectorial V , se calcula por tanto el cardinal de una base. Como consecuencia del teorema de equipotencia de las bases, la dimensión de V es independiente de la base que se elija para calcularla.

(4.12) **Ejemplos.** Eligiendo para calcular la dimensión de cada uno de los siguientes espacios las bases de (4.4), podemos decir que:

(4.12.1) La dimensión del K -espacio vectorial K^n es $\dim_K K^n = n$.

(4.12.2) La dimensión del \mathbb{R} -espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}[x]$ es $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = \aleph_0$.

(4.12.3) La dimensión del \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ es $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Por último, la dimensión del espacio vectorial 0 es $\dim_K 0 = 0$, puesto que la base de 0 es el conjunto vacío.

(4.13) **Ejemplo.** La dimensión de un K -espacio vectorial depende del cuerpo K .

Por ejemplo, la dimensión del \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C} es $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Sin embargo, \mathbb{C} también es un \mathbb{R} -espacio vectorial, y $\{1, i\}$ es una base. Por lo tanto la dimensión de \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial es $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

5. Cociente de espacios vectoriales

(5.1) Sea V un K -espacio vectorial y sea W un subespacio de V .

La relación binaria en V definida por

$$v R v' \leftrightarrow v - v' \in W$$

es una relación de equivalencia.

En efecto,

(5.1.1) R es reflexiva porque para todo $v \in V$, tenemos que $v - v = 0 \in W$, así que $v R v$.

(5.1.2) R es simétrica porque si $v R v'$, entonces $v - v' \in W$. Pero entonces $-1 \cdot (v - v') = v' - v \in W$, así que $v' R v$.

(5.1.3) R es transitiva, dado que si $v R v'$ y $v' R v''$, entonces $v - v', v' - v'' \in W$, y eso implica que $v R v''$ porque

$$v - v'' = v - v' + v' - v'' \in W.$$

El conjunto cociente se denota V/W (en lugar de V/R) para hacer notar que la relación R depende fuertemente de W .

La terna $(V/W, +, \overline{0})$, donde

$$\begin{aligned} + : V/W \times V/W &\longrightarrow V/W \\ \overline{v}, \overline{v'} &\longmapsto \overline{v + v'}, \end{aligned}$$

es un grupo abeliano. Además, la ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V/W &\longrightarrow V/W \\ \lambda, \overline{v} &\longmapsto \overline{\lambda \cdot v}, \end{aligned}$$

dota a V/W de una estructura de K espacio vectorial.

(5.2) Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y W un subespacio de V .

La dimensión de W también es finita, y además menor o igual que N . En efecto, si B' es una base de W , entonces B' es un sistema libre de V , y considerando un sistema generador G de V que contenga a B' (por ejemplo $G = V$), podemos usar el teorema de la base incompleta para garantizar que existe una base B de V tal que $B' \subseteq B \subseteq G$. Por lo tanto, $\dim_K W = |B'| \leq |B| = \dim_K V$.

Sea m la dimensión de W y llamemos v_1, \dots, v_m a los vectores de B' . Entonces $B = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Consideremos el conjunto de clases de equivalencia

$$B'' = \{\overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n}\} \subseteq V/W.$$

Entonces B'' es una base de V/W , porque

- B'' es libre: sean $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $\lambda_{m+1}\overline{v_{m+1}} + \dots + \lambda_n\overline{v_n} = \overline{0}$. Entonces $\lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n = 0$, o sea, $\lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n \in W$. Como B' es una base de W , existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tales que

$$\lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n = \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_mv_m.$$

Tenemos entonces que

$$-\lambda_1v_1 - \dots - \lambda_mv_m + \lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n = 0,$$

y como B es una base, que $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

- B'' es generador: Si $\overline{v} \in V/W$, entonces $v \in V$ y por ser B una base, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tales que

$$v = \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_mv_m + \lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n.$$

Luego $\overline{v} = \overline{\lambda_1v_1 + \dots + \lambda_mv_m + \lambda_{m+1}v_{m+1} + \dots + \lambda_nv_n}$, pero como $\overline{v_i} = \overline{0}$ para $1 \leq i \leq m$, tenemos que $\overline{v} = \lambda_{m+1}\overline{v_{m+1}} + \dots + \lambda_n\overline{v_n}$.

Como consecuencia, la dimensión del espacio cociente V/W es

$$\dim_K V/W = n - m = \dim_K V - \dim_K W.$$

6. Aplicaciones lineales

(6.1) Una aplicación $f : V \longrightarrow V'$ entre los K -espacios vectoriales V y V' se dice que es una *aplicación lineal* si tiene las siguientes propiedades:

- (6.1.1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para cualesquiera $u, v \in V$;
- (6.1.2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para cada $\lambda \in K$ y cada $v \in V$.

(6.2) Si $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal, entonces f es también un homomorfismo entre los grupos $(V, +, 0)$ y $(V', +, 0)$. Por lo tanto (ver (3.2) del Tema 3):

- (6.2.1) $f(0) = 0$;
- (6.2.2) $f(-v) = -f(v)$ para todo $v \in V$.

(6.3) Si V y V' son dos espacios vectoriales, entonces el conjunto

$$\mathcal{L}(V, V') = \{f : f : V \longrightarrow V' \text{ es aplicación lineal}\}$$

es un espacio vectorial con la suma de aplicaciones dada por

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(V, V') \times \mathcal{L}(V, V') &\longrightarrow \mathcal{L}(V, V') \\ f, g &\longmapsto f + g : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & V' \\ v & \mapsto & f(v) + g(v) \end{array} \end{aligned}$$

y el producto de escalares y funciones dado por

$$\begin{aligned} \cdot : K \times \mathcal{L}(V, V') &\longrightarrow \mathcal{L}(V, V') \\ \lambda, f &\longmapsto \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & V' \\ v & \mapsto & \lambda \cdot f(v) = \lambda f(v) \end{array} \end{aligned}$$

(6.4) El espacio vectorial $\mathcal{L}(V, K)$ (poniendo $V' = K$ en el párrafo anterior) se llama *espacio dual* y se denota por V^* . A los elementos de V^* , esto es, a las aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow K$, se les llama también *formas lineales* de V .

7. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

(7.1) Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre los K -espacios vectoriales V y V' . Entonces el *núcleo de f* , que es el conjunto

$$\text{Ker } f = \{v : v \in V, f(v) = 0\}$$

y la *imagen de f* , que es el conjunto

$$\text{Im } f = \{v' : v' \in V', \exists v \in V, f(v) = v'\}$$

son subespacios vectoriales de V y V' respectivamente.

En efecto, como f es en particular un homomorfismo de grupos, sabemos que $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$ son subgrupos de $(V, +, 0)$ y $(V', +, 0)$ respectivamente. Además,

- si $\lambda \in K$ y $v \in \text{Ker } f$, entonces $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0 = 0$, de donde se deduce que $\lambda v \in \text{Ker } f$;
- si $\lambda \in K$ y $v' \in \text{Im } f$, entonces existe $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Consideremos el vector $\lambda v \in V$. Como $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda v'$, se tiene que $\lambda v' \in \text{Im } f$.

(7.2) Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$

- (7.2.1) es un *monomorfismo* si f es inyectiva;
- (7.2.2) es un *epimorfismo* si f es sobreyectiva;
- (7.2.3) es un *isomorfismo* si f es biyectiva;
- (7.2.4) es un *endomorfismo* de V si $V' = V$;
- (7.2.5) es un *automorfismo* si f es un endomorfismo y además es biyectiva.

(7.3) Consideremos los K -espacios vectoriales V y V' , y sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces, de la misma manera que ocurre para un homomorfismo de grupos,

- (7.3.1) f es un monomorfismo si, y sólo si $\text{Ker } f = \{0\}$;
- (7.3.2) f es un epimorfismo si, y sólo si $\text{Im } f = V'$.

(7.4) Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal entre K -espacios vectoriales. Entonces el espacio cociente $V/\text{Ker}f$ es isomorfo al espacio $\text{Im}f$.

Para comprobar que eso es cierto, vamos a comprobar que

$$\begin{aligned} \bar{f} : V/\text{Ker}f &\rightarrow \text{Im}f \\ \bar{v} &\mapsto \bar{f}(\bar{v}) = f(v) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

En primer lugar, si $\bar{v} \in V/\text{Ker}f$, entonces $v \in V$ y $\bar{f}(\bar{v}) = f(v) \in \text{Im}f$. Además, si $\bar{u} = \bar{v}$, entonces $u - v \in \text{Ker}f$, por lo que

$$\bar{f}(\bar{u}) = f(u) = f(u - v + v) = f(u - v) + f(v) = f(v) = \bar{f}(\bar{v}).$$

Luego \bar{f} es una aplicación.

Además \bar{f} es lineal porque si $\bar{u}, \bar{v} \in V/\text{Ker}f$, entonces

$$\bar{f}(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{f}(\overline{u + v}) = f(u + v) = f(u) + f(v) = \bar{f}(\bar{u}) + \bar{f}(\bar{v}),$$

y si $\lambda \in K$ y $\bar{v} \in V/\text{Ker}f$, entonces

$$\bar{f}(\lambda\bar{v}) = \bar{f}(\overline{\lambda v}) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \bar{f}(\bar{v}).$$

Como $\text{Im}\bar{f} = \text{Im}f$, tenemos que f es sobreyectiva.

Por último, si $\bar{u}, \bar{v} \in V/\text{Ker}f$ y $\bar{f}(\bar{u}) = \bar{f}(\bar{v})$, entonces $f(u - v) = \bar{f}(\bar{u}) - \bar{f}(\bar{v}) = 0$, lo que implica que $u - v \in \text{Ker}f$, o sea, $\bar{u} = \bar{v}$. Por lo tanto \bar{f} es también inyectiva.

Luego $\bar{f} : V/\text{Ker}f \rightarrow \text{Im}f$ es un isomorfismo. Este resultado se conoce con el nombre de *primer teorema de isomorfía*.

(7.5) Si $f : W \rightarrow W'$ es un isomorfismo entre los K -espacios vectoriales W y W' , entonces $\dim_K W = \dim_K W'$. En efecto, si $B = \{v_i\}_{i \in I}$ es una base de W , entonces $B' = \{f(v_i)\}_{i \in I}$ es una base de W' , y la aplicación restricción $f|_B : B \rightarrow B'$ es biyectiva, con lo que B y B' tienen el mismo cardinal.

Este hecho, junto con el primer teorema de isomorfía, implica que si $f : V \rightarrow V'$ es una aplicación lineal entre K -espacios vectoriales y $\dim_K V$ es finita, entonces

$$\dim_K V = \dim_K \text{Im}f + \dim_K \text{Ker}f.$$

Esto ocurre porque los espacios vectoriales $V/\text{Ker}f$ e $\text{Im}f$ tienen la misma dimensión al ser espacios vectoriales isomorfos, y la dimensión del espacio cociente $V/\text{Ker}f$ es $\dim_K V - \dim_K \text{Ker}f$.

(7.6) Otra consecuencia del primer teorema de isomorfía es que si V es un K espacio vectorial y U y W son subespacios de V , entonces $U + W/W$ es isomorfo a $U/U \cap W$ (este resultado se conoce como *segundo teorema de isomorfía*).

Para comprobarlo, bastaría verificar que

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow U + W/W \\ u &\mapsto f(u) = \bar{u} \end{aligned}$$

es una aplicación lineal sobreyectiva, y que $\text{Ker}f = U \cap W$. Entonces, como consecuencia del primer teorema de isomorfía,

$$\begin{aligned} \bar{f} : U/U \cap W &\rightarrow U + W/W \\ \bar{u} &\mapsto \bar{f}(\bar{u}) = \bar{u} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

(7.7) Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita, y U y W son subespacios de V , entonces la dimensión de los espacios cocientes $U/U \cap W$ y $U + W/W$ es la misma por ser espacios isomorfos. Como $\dim_K U/U \cap W = \dim_K U - \dim_K U \cap W$ y $\dim_K U + W/W = \dim_K U + W - \dim_K W$, se tiene que la dimensión del subespacio vectorial suma $U + W$ es

$$\dim_K U + W = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K U \cap W.$$