

## Aplicaciones lineales

### 1. Definición y primeras propiedades

**Definición** 1.1. Sean  $V$  y  $V'$  espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $K$ , y  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación, diremos que  $f$  es *lineal* si verifica las dos condiciones siguientes:

- $f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$
- $f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \forall \alpha \in K \quad \forall u \in V$

**Nota** 1.2. Notemos que el concepto de  $n$ -linealidad que introdujimos en el capítulo 2 para un cierto tipo de aplicaciones, se corresponde con la definición de aplicación lineal para el caso  $n = 1$ .

**Definición** 1.3. Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales, es inmediato que la aplicación  $O : V \rightarrow V'$  que a todo vector de  $V$  le hace corresponder el vector cero de  $V'$ , es una aplicación lineal a la que denominaremos *aplicación nula*. Por consiguiente, el conjunto de todas las aplicaciones lineales de  $V$  en  $V'$ , que representaremos por  $\text{Hom}_K(V, V')$ , sabemos que no es vacío.

Además, si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces:

- si  $f$  es inyectiva, la denominaremos *monomorfismo*.
- si  $f$  es suprayectiva, la denominaremos *epimorfismo*.
- si  $f$  es biyectiva, la denominaremos *isomorfismo*, y en este caso diremos que  $V$  es *isomorfo* a  $V'$ , y lo representaremos por  $V \cong V'$ .

Las aplicaciones lineales de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  en sí mismo se denominan *endomorfismos*, y al conjunto  $\text{Hom}_K(V, V)$  se le representa por  $\text{End}_K(V)$ . A los endomorfismos biyectivos se les denomina *automorfismos* y al conjunto de los automorfismos de un  $K$ -espacio vectorial  $V$  se le representa por  $\text{GL}_K(V)$ .

**Consecuencia** 1.4. Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales y  $f : V \rightarrow V'$  es una aplicación, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$
- 2)  $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall u, v \in V$

DEMOSTRACIÓN.

- 1)  $\implies$  2): Es consecuencia inmediata de aplicar las dos condiciones de la definición de aplicación lineal.  
 2)  $\implies$  1): La primera condición de la definición de aplicación lineal se deduce del caso  $\alpha = 1 = \beta$ . La segunda condición se deduce del caso  $\beta = 0$ .  $\square$

**Ejemplos 1.5.**

1. Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n > 0$  y  $\mathbb{B}$  es una base ordenada de  $V$ , la aplicación coordenada respecto a la base  $\mathbb{B}$ ,  $\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$ , que a cada vector de  $V$  le hace corresponder su  $n$ -tupla de coordenadas en la base  $\mathbb{B}$ , es un isomorfismo. En efecto, en el capítulo anterior vimos que cumple las dos condiciones que justifican que es aplicación lineal y además comprobamos que es biyectiva. En consecuencia, si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n > 0$ , entonces  $V \cong K^n$ .
2. Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial, la aplicación  $id_V : V \rightarrow V$ , definida según  $id_V(u) = u \quad \forall u \in V$ , es un automorfismo de  $V$  denominado *identidad en  $V$* , es decir,  $id_V \in GL_K(V)$ . En efecto, es inmediato que es una aplicación biyectiva, y es lineal ya que  $\forall \alpha, \beta \in K$  y  $\forall u, v \in V$ , se verifica que:

$$id_V(\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v = \alpha id_V(u) + \beta id_V(v)$$

3. Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial y  $H \leq V$ , entonces:
  - la aplicación  $\varepsilon : H \rightarrow V$ , definida según  $\varepsilon(h) = h \quad \forall h \in H$ , es un monomorfismo que denominaremos *monomorfismo inclusión del subespacio  $H$  en  $V$* . En efecto, es inmediato que es una aplicación inyectiva, y es lineal ya que,  $\forall \alpha, \beta \in K$  y  $\forall u, v \in H$ , se tiene:

$$\varepsilon(\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v = \alpha \varepsilon(u) + \beta \varepsilon(v)$$

- la aplicación  $\pi : V \rightarrow V/H$ , definida según  $\pi(u) = u + H \quad \forall u \in V$ , es un epimorfismo que denominaremos *epimorfismo proyección de  $V$  en el cociente  $V/H$* . En efecto, es inmediato que es una aplicación suprayectiva, y es lineal ya que,  $\forall \alpha, \beta \in K$  y  $\forall u, v \in V$ , se tiene:

$$\pi(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v) + H = \alpha(u + H) + \beta(v + H) = \alpha \pi(u) + \beta \pi(v)$$

4. Si  $f \in Hom_K(V, V')$  y  $g \in Hom_K(V', V'')$ , entonces la composición  $g \circ f : V \rightarrow V''$ , definida según  $(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad \forall u \in V$ , es aplicación lineal, es decir,  $g \circ f \in Hom_K(V, V'')$ . En efecto,  $\forall \alpha, \beta \in K$  y  $\forall u, v \in V$ , se verifica que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g(f(\alpha u + \beta v)) = g(\alpha f(u) + \beta f(v)) = \\ &= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) = \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v) \end{aligned}$$

**Consecuencias 1.6.** Si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces:

- 1)  $f(0) = 0$ .
- 2)  $f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in V$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1)  $f(0+0) = \begin{cases} f(0) + f(0) & \text{por ser } f \text{ aplicación lineal} \\ f(0) & \text{por ser } 0 \text{ el vector cero} \end{cases} \implies f(0)+f(0) = f(0) \implies f(0) = 0$
- 2)  $f(-u) + f(u) = f(-u + u) = f(0) = 0$ , de donde se deduce la igualdad buscada.

□

**Proposición 1.7.** Si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , se tiene:

- 1) Si  $H$  es subespacio  $V$ , entonces la imagen de  $H$  mediante  $f$ , es decir,  $f(H) = \{f(h) / h \in H\}$ , es subespacio de  $V'$ .
- 2) Si  $H'$  es subespacio de  $V'$ , entonces la antiimagen de  $H'$  mediante  $f$ , es decir, el conjunto  $f^{-1}(H') = \{u \in V / f(u) \in H'\}$ , es subespacio de  $V$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Obviamente, si  $H \leq V$ , entonces  $0 = f(0) \in f(H)$  y  $f(H)$  es un subconjunto no vacío de  $V'$ . Además,  $\forall \alpha, \beta \in K$ , y  $\forall f(h_1), f(h_2) \in f(H)$ , con  $h_1, h_2 \in H$ , entonces, usando la definición de  $f$  como aplicación lineal, y que  $H$  es subespacio de  $V$ , se tiene:

$$\alpha f(h_1) + \beta f(h_2) = f(\alpha h_1 + \beta h_2) \in f(H)$$

por lo que  $f(H)$  es subespacio de  $V'$ .

- 2) Si  $H' \leq V'$ , entonces  $0 \in f^{-1}(H')$  ya que  $f(0) = 0 \in H'$ . Por tanto  $f^{-1}(H')$  es un subconjunto no vacío de  $V$  y, además,  $\forall \alpha, \beta \in K$ , y  $\forall u, v \in f^{-1}(H')$ , entonces  $f(u), f(v) \in H'$  y, haciendo uso de que  $f$  es aplicación lineal, y de que  $H'$  es subespacio de  $V'$ , se tiene:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \in H'$$

por lo que  $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(H')$  y  $f^{-1}(H')$  es subespacio de  $V$ .

□

**Proposición 1.8.** Si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$  es un isomorfismo, entonces:

- 1) La aplicación inversa de  $f$ ,  $f^{-1} : V' \rightarrow V$ , definida según  $f^{-1}(u) = v \iff f(v) = u$ , es lineal y por tanto es un isomorfismo de  $V'$  en  $V$ .
- 2) Para todo subespacio  $H$  de  $V$ , se tiene  $H \cong f(H)$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Si  $f$  es biyectiva, sabemos que admite inversa,  $f^{-1} : V' \rightarrow V$ , que también es biyectiva. Veamos que  $f^{-1}$  también es lineal, para ello, consideremos  $\alpha, \beta \in K$  y  $u_1, u_2 \in V'$ . Supongamos que  $f^{-1}(u_1) = v_1$  y  $f^{-1}(u_2) = v_2$ , lo que equivale a que  $f(v_1) = u_1$  y  $f(v_2) = u_2$ . Obviamente, por ser  $f$  lineal, se tiene:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

y de aquí se tiene:

$$f^{-1}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha f^{-1}(u_1) + \beta f^{-1}(u_2)$$

lo que justifica que  $f^{-1}$  también es lineal.

- 2) A partir del isomorfismo  $f$  podemos definir  $f|_H : H \rightarrow f(H)$ , según  $f|_H(h) = f(h) \quad \forall h \in H$ . Es inmediato que  $f|_H \in \text{Hom}_K(H, f(H))$  y además es inyectiva por serlo  $f$  y suprayectiva porque todo elemento de  $f(H)$  es de la forma  $f(h) = f|_H(h)$ , con  $h \in H$ .

□

**Nota 1.9.** De la proposición anterior se deduce que si  $V \cong V'$ , entonces  $V' \cong V$ , es por ello que, en este caso, simplemente diremos que  $V$  y  $V'$  son *espacios isomorfos*. Por otro lado, puesto que la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva y, según hemos visto en 1.5, la composición de aplicaciones lineales es aplicación lineal, entonces si  $V \cong V'$  y  $V' \cong V''$ , también se tiene  $V \cong V''$ .

## 2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

**Definición 2.1.** Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales y  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , en el apartado anterior hemos visto que la imagen de todo subespacio de  $V$  es subespacio de  $V'$  y la antiimagen de todo subespacio de  $V'$  es subespacio de  $V$ , en particular, para  $V \leq V$  y  $\{0\} \leq V'$ , se tiene:

- $f(V) = \{f(u) / u \in V\} \leq V'$ , subespacio al que denominamos *subespacio imagen de  $f$*  y representamos por  $\text{Im}f$ .
- $f^{-1}(\{0\}) = \{u \in V / f(u) = 0\} \leq V$ , subespacio al que denominamos *subespacio núcleo de  $f$*  y representamos por  $\text{Ker}f$ .

**Proposición 2.2.** Si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces:

- 1)  $f$  es monomorfismo  $\iff \text{Ker}f = \{0\}$
- 2)  $f$  es epimorfismo  $\iff \text{Im}f = V'$
- 3)  $f$  es isomorfismo  $\iff \text{Ker}f = \{0\}$  e  $\text{Im}f = V'$

DEMOSTRACIÓN.

- 1)  $\implies$ : Bastará justificar la inclusión  $\text{Ker } f \subseteq \{0\}$  ya que la otra inclusión siempre es cierta por ser  $\text{Ker } f$  subespacio. Supongamos pues  $u \in \text{Ker } f$ , entonces  $f(u) = 0$ , pero en 1.6 hemos visto que  $f(0) = 0$ , y de aquí  $f(u) = f(0)$ , pero de la inyectividad de  $f$  se deduce que necesariamente  $u = 0$ .  
 $\impliedby$ : Si suponemos  $f(u) = f(v)$ , haciendo uso de la definición de  $f$  como aplicación lineal y de 1.6, tenemos que  $f(u - v) = 0$ , de donde deducimos que  $u - v \in \text{Ker } f = \{0\}$  y, por consiguiente,  $u - v = 0$ , de donde  $u = v$ , lo que justifica la inyectividad de  $f$ .
- 2) Esta equivalencia es consecuencia directa de la definición de aplicación suprayectiva y de que  $\text{Im } f = f(V)$ .
- 3) Esta equivalencia es consecuencia directa de los dos apartados anteriores.

□

**Proposición 2.3.** Si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$  y  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  es base de  $V$ , entonces:

- 1)  $\langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle = \text{Im } f$
- 2)  $f$  es monomorfismo  $\iff \{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$  es un sistema libre de  $V'$
- 3)  $f$  es epimorfismo  $\iff \{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$  es un sistema generador de  $V'$
- 4)  $f$  es isomorfismo  $\iff \{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$  es base de  $V'$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) La inclusión  $\langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle \subseteq \text{Im } f$ , es consecuencia inmediata de la definición de subespacio generado por un conjunto de vectores y de que  $\text{Im } f$  es un subespacio de  $V'$  que contiene al conjunto  $\{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$ .

Para justificar la inclusión  $\text{Im } f \subseteq \langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle$ , consideremos un vector de  $\text{Im } f$ , que será de la forma  $f(v)$ , con  $v \in V$ . Por ser  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  base de  $V$ , existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  de manera que  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ , entonces, usando reiteradas veces la definición de  $f$  como aplicación lineal, tenemos:

$$f(v) = f(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n) \in \langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle$$

- 2)  $\implies$ : Supongamos  $0 = \alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \dots + \alpha_n f(b_n)$ , entonces, usando reiteradas veces la definición de  $f$  como aplicación lineal, se tiene:

$$0 = \alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \dots + \alpha_n f(b_n) = f(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n)$$

pero como  $f(0) = 0$  y  $f$  es monomorfismo, de aquí se tiene:

$$0 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$$

y como  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  es un sistema libre, se tiene que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ .

$\Leftarrow$ : Haciendo uso de 2.2, para ver que  $f$  es monomorfismo comprobaremos que si  $v \in \text{Ker } f$ , necesariamente se tiene  $v = 0$ . Supongamos pues  $v \in \text{Ker } f$ , por ser  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  base de  $V$ , existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  de manera que  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$ , entonces:

$$0 = f(v) = f(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$$

y puesto que  $\{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$  es libre, entonces  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$  y, de aquí,  $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n = 0$ .

- 3) Es consecuencia del primer apartado y de que  $f$  es epimorfismo si y sólo si  $\text{Im } f = V'$ .
- 4) Es consecuencia directa de los dos apartados anteriores.

□

### 3. Teorema de existencia y unicidad

**Proposición 3.1.** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales con  $\dim_K V = n > 0$  y sea  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  una base ordenada de  $V$ , entonces para toda  $n$ -tupla de vectores de  $V'$ ,  $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in V'^n$ , existe una aplicación lineal, y sólo una,  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$  tal que  $f(b_i) = w_i \ \forall i, 1 \leq i \leq n$ .

DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso de la aplicación coordenada respecto a la base  $\mathbb{B}$ ,  $\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$ , que según hemos visto en 1.5, página 105, es un isomorfismo, definimos la aplicación  $f : V \rightarrow V'$  según:

$$\forall u \in V \quad f(u) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n \quad / \quad \varphi_{\mathbb{B}}(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Para justificar que  $f$  es lineal, consideremos  $\alpha, \beta \in K$  y  $u, v \in V$ , entonces, si suponemos que  $\varphi_{\mathbb{B}}(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  y  $\varphi_{\mathbb{B}}(v) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , por ser  $\varphi_{\mathbb{B}}$  lineal, tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{B}}(\alpha u + \beta v) &= \alpha \varphi_{\mathbb{B}}(u) + \beta \varphi_{\mathbb{B}}(v) = \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1, \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2, \dots, \alpha\alpha_n + \beta\beta_n) \end{aligned}$$

y, de la definición de  $f$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)w_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n = \cdots \\ &= \alpha(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_n w_n) = \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , puesto que  $\varphi_{\mathbb{B}}(b_i) = e_i$ , donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $K^n$ , de la definición de  $f$  se tiene que  $f(b_i) = 0w_1 + \dots + 0w_{i-1} + 1w_i + 0w_{i+1} + \dots + 0w_n = w_i$ .

Finalmente, respecto a la unicidad, si suponemos que  $g \in \text{Hom}_K(V, V')$  y  $g(b_i) = w_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$ , entonces,  $\forall u \in V$ , si  $\varphi_{\mathbb{B}}(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , se tiene que  $f(u) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$  y también que  $u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ , y de aquí:

$$g(u) = g(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 g(b_1) + \alpha_2 g(b_2) + \dots + \alpha_n g(b_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = f(u)$$

□

**Nota 3.2.** Notemos que del resultado anterior se deriva que una aplicación lineal queda unívocamente determinada por las imágenes de los vectores de una base.

**Corolario 3.3.** Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita, entonces:

$$V \cong V' \iff \dim_K V = \dim_K V'$$

DEMOSTRACIÓN.

$\implies$ : De  $V \cong V'$ , sabemos que existe un isomorfismo,  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ . Además, si  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  es base de  $V$ , de 2.3, página 108, se deduce que  $\{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$  es base de  $V'$ , y por consiguiente  $\dim_K V = \dim_K V'$ .

$\impliedby$ : Supongamos  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  base ordenada de  $V$  y  $\mathbb{B}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$  de  $V'$ , por el resultado anterior, 3.1,  $\exists f \in \text{Hom}_K(V, V')$  tal que  $f(b_i) = b'_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$ , pero, de acuerdo con la proposición 2.3,  $f$  es isomorfismo ya que transforma una base de  $V$  en una base de  $V'$ .

□

#### 4. Descomposición canónica. Teorema fundamental de isomorfía

**Proposición 4.1.** (*Descomposición canónica de una aplicación lineal*) Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales y  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces existe un isomorfismo,  $\bar{f} : V/\text{Ker} f \rightarrow \text{Im} f$ , y sólo uno, tal que  $f = \varepsilon \circ \bar{f} \circ \pi$ , donde  $\varepsilon : \text{Im} f \rightarrow V'$  es el monomorfismo inclusión y  $\pi : V/\text{Ker} f \rightarrow V/\text{Ker} f$  es el correspondiente epimorfismo proyección, lo que gráficamente se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \pi \downarrow & & \uparrow \varepsilon \\ V/\text{Ker} f & \xrightarrow[\bar{f}]{\cong} & \text{Im} f \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Según vimos en el capítulo anterior, los elementos de  $V/\text{Ker}f$  son las clases de equivalencia que la relación " $u \text{ } R_{\text{Ker}f} \text{ } v \iff u - v \in \text{Ker}f$ " define en  $V$ . Notemos en primer lugar que esta relación es compatible con la aplicación  $f$ , es decir, que todos los elementos de  $V$  que están en la misma clase de equivalencia, tienen la misma imagen mediante  $f$ :

$$u + \text{Ker}f = v + \text{Ker}f \implies u - v \in \text{Ker}f \implies f(u - v) = 0 \implies f(u) = f(v)$$

esto nos permite definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \bar{f}: V/\text{Ker}f &\longrightarrow \text{Im}f \\ u + \text{Ker}f &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

Comprobemos a continuación todas las condiciones exigidas a  $\bar{f}$ :

- $\bar{f} \in \text{Hom}_K(V/\text{Ker}f, \text{Im}f)$ : Consideremos  $\alpha, \beta \in K$  y  $u + \text{Ker}f, v + \text{Ker}f \in V/\text{Ker}f$ , entonces, haciendo uso de que  $f$  es aplicación lineal, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\alpha(u + \text{Ker}f) + \beta(v + \text{Ker}f)) &= \bar{f}((\alpha u + \beta v) + \text{Ker}f) = \\ &= f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha \bar{f}(u + \text{Ker}f) + \beta \bar{f}(v + \text{Ker}f) \end{aligned}$$

- $\bar{f}$  inyectiva: Como ya hemos comprobado que  $\bar{f}$  es aplicación lineal, bastará justificar que si  $u + \text{Ker}f \in \text{Ker}\bar{f}$ , entonces necesariamente  $u + \text{Ker}f = 0 + \text{Ker}f = \text{Ker}f$ . En efecto:

$$\begin{aligned} u + \text{Ker}f \in \text{Ker}\bar{f} &\implies \bar{f}(u + \text{Ker}f) = 0 \implies f(u) = 0 \implies \\ &\implies u \in \text{Ker}f \implies u + \text{Ker}f = 0 + \text{Ker}f = \text{Ker}f \end{aligned}$$

- $\bar{f}$  suprayectiva: Es inmediato puesto que un elemento arbitrario de  $\text{Im}f$  es de la forma  $f(u)$ , con  $u \in V$ , y obviamente se tiene que  $u + \text{Ker}f \in V/\text{Ker}f$  y  $\bar{f}(u + \text{Ker}f) = f(u)$ .
- $f = \varepsilon \circ \bar{f} \circ \pi$ : Puesto que ambos miembros de la igualdad que hemos de justificar, son aplicaciones con el mismo dominio,  $V$ , y el mismo codominio,  $V'$ , es suficiente justificar que a cada elemento  $u \in V$  le asignan la misma imagen, en efecto, haciendo uso de la definición de cada una de estas aplicaciones, tenemos:

$$(\varepsilon \circ \bar{f} \circ \pi)(u) = \varepsilon(\bar{f}(\pi(u))) = \varepsilon(\bar{f}(u + \text{Ker}f)) = \varepsilon(f(u)) = f(u)$$

- Unicidad: Si suponemos  $g \in \text{Hom}_K(V/\text{Ker}f, \text{Im}f)$ , verificando  $f = \varepsilon \circ g \circ \pi$ , veamos que  $\bar{f} = g$ , en efecto,  $\forall u + \text{Ker}f \in V/\text{Ker}f$ , se tiene:

$$g(u + \text{Ker}f) = g(\pi(u)) = \varepsilon(g(\pi(u))) = (\varepsilon \circ g \circ \pi)(u) = f(u) = \bar{f}(u + \text{Ker}f)$$

□

**Corolario 4.2.** (*Teorema fundamental de isomorfía*) Para todo  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$  se tiene que  $V/\text{Ker}f \cong \text{Im}f$ .

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del resultado anterior ya que la aplicación  $\bar{f}$  obtenida a partir de  $f$  es un isomorfismo. □

**Corolario 4.3.** (*Fórmula de las dimensiones para una aplicación lineal*) Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita y  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces:

$$\dim_K V = \dim_K \text{Ker}f + \dim_K \text{Im}f$$

DEMOSTRACIÓN. Según vimos en el capítulo anterior, por ser  $V$  espacio vectorial de dimensión finita, el cociente  $V/\text{Ker}f$  también lo es y  $\dim_K V/\text{Ker}f = \dim_K V - \dim_K \text{Ker}f$ , asimismo, por ser  $V'$  de dimensión finita, el subespacio  $\text{Im}f$  de  $V'$  es también de dimensión finita. Por consiguiente, haciendo uso de 3.3, página 110, y del corolario anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} V/\text{Ker}f \cong \text{Im}f &\implies \dim_K V/\text{Ker}f = \dim_K \text{Im}f \implies \\ \implies \dim_K V - \dim_K \text{Ker}f &= \dim_K \text{Im}f \implies \dim_K V = \dim_K \text{Ker}f + \dim_K \text{Im}f \end{aligned}$$

□

**Corolario 4.4.** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita con  $\dim_K V = \dim_K V'$  y sea  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $f$  es monomorfismo.
- 2)  $f$  es epimorfismo.
- 3)  $f$  es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Haremos uso de un resultado visto en el capítulo anterior, por el que sabemos que en un espacio vectorial de dimensión finita, todo subespacio con igual dimensión que el propio espacio vectorial, necesariamente coincide con éste.

1)  $\implies$  2): Si  $f$  es monomorfismo, tenemos que  $\text{Ker}f = \{0\}$  y, por tanto  $\dim_K \text{Ker}f = 0$ , entonces de la fórmula de las dimensiones vista en el corolario anterior, tenemos que  $\dim_K V = \dim_K \text{Im}f$ , pero como estamos suponiendo  $\dim_K V' = \dim_K V$ , tenemos  $\text{Im}f \leq V'$ , con  $\dim_K \text{Im}f = \dim_K V'$ , y por consiguiente  $\text{Im}f = V'$  y  $f$  es epimorfismo.

2)  $\implies$  3): Si  $f$  es epimorfismo, entonces  $\text{Im}f = V'$  y por consiguiente  $\dim_K \text{Im}f = \dim_K V' = \dim_K V$ , entonces, de la fórmula de las dimensiones vista en el corolario anterior, tenemos:

$$\dim_K V = \dim_K \text{Ker}f + \dim_K \text{Im}f = \dim_K \text{Ker}f + \dim_K V \implies$$

$$\implies \dim_K \text{Ker } f = 0 \implies \text{Ker } f = \{0\} \implies f \text{ monomorfismo}$$

Y puesto que  $f$  es simultáneamente epimorfismo y monomorfismo, es isomorfismo.

3)  $\implies$  1): Esta implicación es inmediata.

□

## 5. El espacio vectorial de las aplicaciones lineales

**Lema** 5.1. Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales, entonces:

1)  $\forall f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ , la aplicación  $f + g : V \rightarrow V'$  definida según:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall v \in V$$

es aplicación lineal, es decir,  $f + g \in \text{Hom}_K(V, V')$ .

2)  $\forall \alpha \in K$  y  $\forall f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , la aplicación  $\alpha f : V \rightarrow V'$  definida según:

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in V$$

es aplicación lineal, es decir,  $\alpha f \in \text{Hom}_K(V, V')$ .

DEMOSTRACIÓN.

1) Si  $\alpha, \beta \in K$  y  $u, v \in V$ , entonces, haciendo uso de que  $f$  y  $g$  son aplicaciones lineales, tenemos:

$$\begin{aligned} (f + g)(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha u + \beta v) + g(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) + \alpha g(u) + \beta g(v) = \\ &= \alpha(f(u) + g(u)) + \beta(f(v) + g(v)) = \alpha(f + g)(u) + \beta(f + g)(v) \end{aligned}$$

2) Si  $\lambda, \mu \in K$  y  $u, v \in V$ , entonces, haciendo uso de que  $f$  es aplicación lineal, tenemos:

$$\begin{aligned} (\alpha f)(\lambda u + \mu v) &= \alpha f(\lambda u + \mu v) = \alpha(\lambda f(u) + \mu f(v)) = \\ &= \alpha\lambda f(u) + \alpha\mu f(v) = \lambda(\alpha f)(u) + \mu(\alpha f)(v) \end{aligned}$$

□

**Proposición** 5.2. Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales, el conjunto no vacío  $\text{Hom}_K(V, V')$  tiene estructura de  $K$ -espacio vectorial para las operaciones siguientes:

$$+ : \text{Hom}_K(V, V') \times \text{Hom}_K(V, V') \longrightarrow \text{Hom}_K(V, V')$$

$$(f, g) \longrightarrow f + g$$

$$\cdot : K \times \text{Hom}_K(V, V') \longrightarrow \text{Hom}_K(V, V')$$

$$(\alpha, g) \longrightarrow \alpha f$$

DEMOSTRACIÓN. El lema anterior nos ha permitido definir las dos aplicaciones  $+$  y  $\cdot$  para las que vamos a comprobar que  $\text{Hom}_K(V, V')$  tiene estructura de  $K$ -espacio vectorial.

- EV1:  $f + g = g + f \quad \forall f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$  ya que,  $\forall v \in V$ , haciendo uso de la estructura de  $K$ -espacio vectorial de  $V'$ , se tiene:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g + f)(v)$$

- EV2:  $(f + g) + h = f + (g + h) \quad \forall f, g, h \in \text{Hom}_K(V, V')$  ya que,  $\forall v \in V$ , haciendo uso de la estructura de  $K$ -espacio vectorial de  $V'$ , se tiene:

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(v) &= (f + g)(v) + h(v) = (f(v) + g(v)) + h(v) = \\ &= f(v) + (g(v) + h(v)) = f(v) + (g + h)(v) = (f + (g + h))(v) \end{aligned}$$

- EV3: La aplicación nula,  $O \in \text{Hom}_K(V, V')$ , definida en 1.3, página 104, verifica que  $f + O = f = O + f \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , ya que,  $\forall v \in V$ , se tiene:

$$(f + O)(v) = f(v) + O(v) = f(v) + 0 = f(v) = 0 + f(v) = O(v) + f(v) = (O + f)(v)$$

- EV4:  $\forall f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , se tiene que  $(-1)f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , verifica que  $f + (-1)f = O = (-1)f + f$ , ya que,  $\forall v \in V$ , se tiene:

$$\begin{aligned} (f + (-1)f)(v) &= f(v) + ((-1)f)(v) = f(v) + (-1)f(v) = f(v) - f(v) = 0 = \\ &= -f(v) + f(v) = (-1)f(v) + f(v) = ((-1)f)(v) + f(v) = ((-1)f + f)(v) \end{aligned}$$

- EV5:  $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g \quad \forall \alpha \in K \text{ y } \forall f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$  ya que,  $\forall v \in V$ , se tiene:

$$\begin{aligned} (\alpha(f + g))(v) &= \alpha(f + g)(v) = \alpha(f(v) + g(v)) = \\ &= \alpha f(v) + \alpha g(v) = (\alpha f)(v) + (\alpha g)(v) = (\alpha f + \alpha g)(v) \end{aligned}$$

- EV6:  $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \quad \forall \alpha, \beta \in K \text{ y } \forall f \in \text{Hom}_K(V, V')$  ya que,  $\forall v \in V$ , se tiene:

$$((\alpha + \beta)f)(v) = (\alpha + \beta)f(v) = \alpha f(v) + \beta f(v) = (\alpha f)(v) + (\beta f)(v) = (\alpha f + \beta f)(v)$$

- EV7:  $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f) \quad \forall \alpha, \beta \in K \text{ y } \forall f \in \text{Hom}_K(V, V')$  ya que,  $\forall v \in V$ , se tiene:

$$((\alpha\beta)f)(v) = (\alpha\beta)f(v) = \alpha(\beta f(v)) = \alpha((\beta f)(v)) = (\alpha(\beta f))(v)$$

- EV8:  $1f = f \quad \forall f \in \text{Hom}_K(V, V')$  ya que,  $\forall v \in V$ , se tiene:

$$(1f)(v) = 1f(v) = f(v)$$

□