

Estructura y evolución estelar

Modelos de atmósferas:

$$T_e, g, \chi \leftrightarrow L, T(\tau), P(\tau), \textit{espectro}, ..$$

→ Permite situar estrellas en el diagrama HR

No explican:

- Relaciones entre L , M , R , T_e
- Relación $M - L$
- Diagrama HR como tal (p.e., diagramas de cúmulos estelares)

⇒ *Necesitamos Estructura Estelar*

- Condiciones de equilibrio
- Ecuaciones de estado
- Producción/transporte energético
- Opacidad del material

Ecuaciones de estructura y modelos estelares

Hipótesis básica: *las estrellas son sistemas gaseosos aislados en equilibrio.*

Matizaciones:

- Sistema aislado
 - Binarias próximas
- b) Equilibrio
 - Reacciones nucleares \rightarrow variación de $\chi \rightarrow$ variación producción de energía \rightarrow variación de la estructura estelar y funciones de estado.
 - Pérdida de masa

Estados estacionarios: Fenómenos suficientemente lentos

Sucesivos estados estacionarios (modelos de estructura estelar originados por los procesos nucleares dominantes): *Evolución Estelar* (edad)

- Producción de energía depende de la masa:
- Diferentes trayectorias evolutivas de las estrellas de masa distinta

Ecuaciones de equilibrio

- Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho \quad (1)$$

- Equilibrio hidrostático:

$$\nabla P + \rho \nabla \Phi = 0 \quad (2)$$

$$- P = P(\rho, T, \chi)$$

- Ecuación de transporte

$$F = -k \nabla T \quad (3)$$

con F el flujo ($\int F ds = L$)

- Ecuación de energía:

$$T \frac{dS}{dt} = \rho \epsilon - \text{div} F \quad (4)$$

– S = entropía; ϵ = tasa de producción de energía por unidad de masa.

- Conservación de masa:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0 \quad (5)$$

– \mathbf{v} = velocidad del fluido.

- Conservación de especies químicas:

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} = \nabla \rho v_i c_i + \sum_j k_{ij} \rho^2 c_i c_j \quad (6)$$

– c_i = concentración de masa del elemento i

– k_{ij} = tasa de reacción del elemento i con j

– v_i = velocidad de difusión del elemento i

(No consideramos rotación ni campo magnético)

Equilibrio hidrostático

Hipótesis: Simetría esférica

• $P(r)$, $T(r)$, $M(r)$, $\rho(r)$ = cte. para mismo r (superficies equipotenciales)

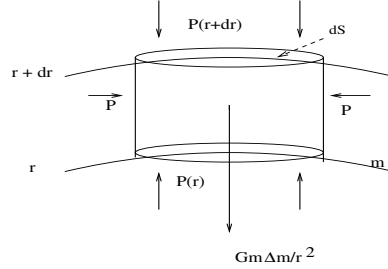


Figura 1: Equilibrio hidrostático en el interior estelar

En equilibrio:

$$F_{grav} = F_{pres.}$$

Fuerza de gravedad sobre el elemento de masa en el cilindro elemental:

$$g(r) \rho(r) dS dr. \quad (7)$$

– Por tanto:

$$dP = -g(r) \rho(r) dr \quad (8)$$

– $P = P_g + P_r$ (presión total).

$$- g(r) = G \frac{M_r}{r^2}$$

$$- M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

– Ecuación de conservación de masa (ecuación de continuidad):

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (9)$$

Ecuación de equilibrio hidrostático: se puede expresar como:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho \quad ; \quad \frac{dP}{dM_r} = -G \frac{M_r}{4\pi r^4} \quad (10)$$

– La presión disminuye hacia afuera (lado derecho siempre negativo)

Presión y temperatura en el interior estelar

- Se puede estimar la presión y temperatura en el interior estelar integrando eq. de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho$$

Integrando de 0 a R (radio estelar):

$$P_0 - P_R = G \int_0^R \frac{M_r}{r^2} \rho dr \quad (11)$$

1. – Tomando: $r = R/2$, $M_r = M$, $\rho = \bar{\rho}$, $P_R = 0$:

$$P_0 \approx GM \frac{4}{R^2} \bar{\rho} R \quad (12)$$

– Como:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$$

$$P_0 \approx \frac{GM^2}{R^4} \quad (13)$$

P engloba todas las contribuciones.

- Hacemos $\beta = P_g/(P_g + P_r) = P_g/P$, razón de la P_g a la total
- Para P_g consideramos la ecuación de los gases:

$$P_g = \frac{\rho}{m_g} kT = \frac{\rho}{\bar{\mu}} \mathcal{R}T$$

– m_g = masa de la partícula de gas, $\bar{\mu}$ = peso molecular medio

$$T_0 \approx \frac{\beta P_0 \bar{\mu}}{\mathcal{R} \rho_0} \approx \frac{\beta \bar{\mu}}{\mathcal{R}} \frac{GM}{R} \quad (14)$$

– hemos tomado $\rho_0 \approx 4\bar{\rho}$.

- En unidades solares:

$$\bar{\rho} = 1,41 \frac{M}{M_{\odot}} \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right)^3 \text{ g cm}^{-3}$$

$$P_0 \approx 1 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right)^4 \text{ din cm}^{-2}$$

$$T_0 \approx 2 \times 10^7 \bar{\mu} \beta \frac{M}{M_{\odot}} \frac{R_{\odot}}{R} \text{ K}$$

- Gas soporta la gravedad ($\beta \approx 1$).

– Para el Sol (suponemos $\bar{\mu} = 1$):

$$T_0 \approx 10^7 \text{ K} \quad ; \quad P_0 \approx 10^{10} \text{ atm}$$

- Radiación soporte frente a la gravedad:

$$P = P_R = \frac{4}{3c} \sigma T^4 = \frac{a}{3} T^4$$

$$P_0 = \alpha \frac{GM^2}{R^4} \quad ; \quad T^4 = \alpha \frac{3GM^2}{aR^4}$$

– α = coeficiente

– $\alpha = 1/2$, y el Sol: $\rightarrow T_{\odot} \approx 4 \times 10^7 \text{ K}$

- Contribución relativa de P_g y P_R con M

$$P = P_R + P_g \ ; \ P_g = \beta P \ ; \ P_R = (1 - \beta)P$$

$$P \propto \frac{GM^2}{R^4}$$

$$P_g = \frac{\rho}{\bar{\mu}} \mathcal{R} T_g \propto \beta \frac{GM^2}{R^4} \Rightarrow T_g \propto \frac{M^2}{\rho R^4} \propto \frac{M}{R}$$

$$P_R = \frac{1}{3} T_R^4 \propto (1 - \beta) \frac{GM^2}{R^4} \Rightarrow T_R^4 \propto \frac{GM^2}{R^4}$$

$$T_g \propto M \rightarrow P_g \propto M$$

$$T_R^4 \propto M^2 \rightarrow P_R \propto M^2$$

$\Rightarrow P_R$ crece más rápido que P_g con la masa de la estrella

2. – Alternativamente: estimamos un límite inferior a la presión central.

- En la ecuación de equilibrio hidrostático, sustituimos r por el radio estelar $R(\geq r)$:

$$P_0 - P_M = G \int_0^M \frac{M_r}{4\pi r^4} dM_r \quad (15)$$

$$P_0 > G \int_0^M \frac{M_r}{4\pi R^4} dM_r \quad (16)$$

$$P_0 > \frac{GM^2}{8\pi R^4} = 4,4 \times 10^{13} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^4 N m^{-2} \quad (17)$$

Validez del equilibrio hidrostático. Escala dinámica de tiempo

Consideramos un elemento de volumen cilíndrico (Fig). Su masa es:

$$\Delta m = \rho dr dS$$

– $\rho = \text{cte.}$ (dr es muy pequeño).

Las fuerzas que actúan son de dos tipos:

- i) Gravitacional (masa interior a la esfera de radio r)
- ii) Presión del gas que rodea al elemento de volumen.

La ecuación del movimiento:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \Delta m = -\frac{Gm \Delta m}{r^2} + P(r) dS - P(r + dr) dS \quad (18)$$

– $P(r + dr) = P(r) + \frac{\partial P}{\partial r} dr$:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \Delta m = -\frac{Gm \Delta m}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\Delta m}{\rho} \quad (19)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad ; \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} \quad (20)$$

- Si la aceleración es despreciable: equilibrio hidrostático
- Si las fuerzas no son iguales (expansión o contracción) \rightarrow cambio en la estructura esférica de la estrella

1. Caso más simple de salida del equilibrio: movimiento cuya duración o escala de tiempo dada por la distancia dividida por la velocidad de propagación.

– Supongamos una perturbación $\Phi = R$ (dimensión característica estelar). La razón típica de la perturbación sería (la fuerza de atracción es la gravedad):

$$\frac{d\Phi}{dt} = v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (21)$$

El tiempo dinámico sería:

$$\tau_d \approx \frac{R}{v_{esc}} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (22)$$

- Para el Sol: $\tau_d \approx 1000 \text{ s}$
- En general:

$$\tau_d \approx 1000 \sqrt{\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^3 \left(\frac{M_\odot}{M}\right)} \text{ s}$$

Significado:

- Si una estrella no se puede recuperar de una perturbación como la dada por la escala de tiempos dinámico \rightarrow expansión (explosión) o colapso. *Supernovas*
- Se observan cambios en estrellas que indican procesos dinámicos pero que no involucran a toda la estrella (oscilaciones con períodos

característicos, pulsaciones,...). Nótemos que a partir de τ_d de estos procesos se puede estimar $\bar{\rho}$. El Sol se observa que tiene oscilaciones con períodos de minutos.

- Sin embargo, como regla: *Estrellas están en equilibrio hidrostático. Cualquier perturbación se anula rápidamente. Estrellas evolucionan quasi-estáticamente, ajustando su estructura interna para mantener el balance dinámico.*

2. De otra forma:

$$F_g \neq F_p \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = f g(r)$$

– en el tiempo τ :

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{d^2 r}{dt^2} \tau^2 = \frac{1}{2} f g(r) \tau^2$$

$$\tau = \left(2 \frac{\Delta r}{f g(r)} \right)^{1/2}$$

– Suponemos $\Delta r = r$ y $g(r) = GM_r/r^2$

$$\tau = \left(\frac{2r^3}{f GM_r} \right)^{1/2}$$

– En la superficie solar: $r = 7 \times 10^8 m$, $g = 270 m s^{-2}$

$$\tau \approx 2,3 \times 10^3 f^{-1/2} s$$

• En los últimos 10^9 años no ha habido cambios significativos en la Tierra (registros geológicos, elementos radiactivos)

\Rightarrow Sol ha permanecido constante $\rightarrow f \leq 10^{-27}$

Ejercicios

1. El perfil de densidad de una estrella de masa M está dado por:

$$\rho = \rho_c [1 - (\frac{r}{R})^2]$$

– $\rho_c = \text{cte.}$, $R = \text{radio estelar.}$

Hallar: i) $m(r)$, ii) relación entre M y R , iii) mostrar que la densidad media de la estrella es $0.4 \rho_c$

Solución:

i) La masa a una distancia r es:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_c [\int_0^r r^2 dr - \frac{1}{R^2} \int_0^r r^4 dr]$$

$$m(r) = 4\pi \rho_c (\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2})$$

ii)

$$M = m(R) = 8\pi \rho_c R^3 / 15$$

iii) Por definición

$$\bar{\rho} = \frac{M}{(4\pi/3)R^3}$$

- Comparando con ii) $\Rightarrow \bar{\rho} = 0.4\rho_c$

2. Para una estrella de masa M y radio R con un perfil de densidad igual al del ejercicio anterior demostrar que se cumple:

$$P_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

Solución:

– La ecuación de equilibrio hidrostático es:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2}$$

– Tomando $\rho(r)$, $m(r)$, $M(R)$ del ejercicio anterior ($P(R) = 0$):

$$P_c = G \int_0^R \rho \frac{m}{r^2} dr = 4\pi G \rho_c^2 \int_0^R [1 - (\frac{r}{R})^2] (\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}) dr$$

$$P_c = \frac{15GM^2}{16\pi R^4} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

3. Si ρ_c es la densidad mayor en el centro de una estrella y P_c es la presión correspondiente, demostrar que:

$$P_c < (4\pi)^{1/3} 0,347 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

Solución:

- Si suponemos que la densidad de la estrella es ρ_c (uniforme) obtenemos un límite superior para P_c .
- Consideramos:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c \quad ; \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi \rho_c} \right)^{4/3}$$

Integramos la ecuación de equilibrio:

$$P_c = \rho \int_0^R \frac{Gm}{r^2} dr$$

- Sustituimos m por la expresión de arriba, se integra y se sustituye R por su valor, queda:

$$P_c < \frac{1}{2} (4\pi/3)^{1/3} GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

4. En un ejercicio anterior hemos visto que para un perfil de densidad de una estrella de masa M dado por:

$$\rho = \rho_c [1 - (\frac{r}{R})^2]$$

- ($\rho_c = \text{cte.}$, $R = \text{radio estelar}$)
- la masa $m(r)$ es:

$$m(r) = 4\pi \rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right)$$

Por otra parte, la energía potencial gravitacional es:

$$\Omega = -\alpha \frac{GM^2}{R}$$

Se pide estimar el valor de α para el perfil de densidad dado.

Solución

$$dm = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned} \Omega &= - \int_0^M \frac{Gm dm}{r} = \\ &= -4\pi G \rho_c^2 \int_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 4\pi r dr \\ \Omega &= -\frac{5}{7} \frac{GM^2}{R} \Rightarrow \alpha = 0,71 \end{aligned}$$