

Modelos estelares

Un modelo estelar es una solución a las ecuaciones de estructura.

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m}{r^2} \rho \quad ; \quad \frac{dP}{dm} = -\frac{G}{4\pi} \frac{m}{r^4} \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2 \quad ; \quad \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi \rho r^2} \quad (2)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi \rho r^2 (\epsilon_n + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{du}{dt}) \quad ; \quad \frac{dL_r}{dm} = \epsilon_N - c_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad ; \quad \frac{dT}{dm} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa}{T^3} \frac{L_r}{(4\pi r^2)^2} \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dr} = \nabla_{ad} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad ; \quad \frac{dT}{dm} = \nabla_{ad} \frac{T}{P} \frac{dP}{dm} \quad (5)$$

– Además:

- Ecuación de estado: $P = \frac{\mathcal{R}}{\mu_I} \rho T + P_e + \frac{1}{3} a T^4$
- Variación de la opacidad y de la generación de energía (funciones de la densidad y temperatura):

$$\kappa = \kappa_0 \rho^a T^b \quad ; \quad q = q_0 \rho^m T^n$$

– Condiciones de contorno:

- $m = 0, r = 0, F = 0$
- $m = M, r = R, P = 0, L = F(R)$ (o equivalente la T_e)

Integración suministra los perfiles de T, ρ, m y F

– No hay soluciones analíticas sencillas

- ¿Cómo resolver analíticamente la ecuaciones?

Tratar de encontrar una propiedad que cambie de forma uniforme o moderada desde el centro a la superficie, teniendo en cuenta las condiciones de contorno.

- T cambia al menos tres ordenes de magnitud
- P al menos 14 ordenes de magnitud
- Sin embargo, parece razonable suponer una χ uniforme

Modelos politrópicos

Ecuaciones (1) y (2) ligadas a (3) y (4) (y 5 en su caso) por la dependencia de P con T .

Si P es función solamente de la densidad (también de χ obviamente) (1) y (2) se pueden resolver separadamente.

- *Significado: Configuración hidrostática es independiente del flujo de energía*

– Multiplicamos la ecuación (1) por r^2/ρ y diferenciando respecto de r

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr}\right) = -G \frac{dm}{dr} \quad (6)$$

– Sustituyendo (2):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G \rho \quad (7)$$

- Consideramos ecuaciones de estado de la forma (ecuaciones de estado politrópicas):

$$P = K \rho^\gamma \quad (K, \gamma = \text{ctes.}) \quad (8)$$

– Se llama índice politrópico, n :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \quad (9)$$

– (Ejemplos: gas degenerado: $\gamma = 5/3, n = 1,5$; gas degenerado relativista: $\gamma = 4/3, n = 3$)

– Sustituyendo en (7):

$$\frac{(n+1)K}{4\pi Gn} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho^{(n-1)/n}} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\rho \quad (10)$$

• La solución $\rho(r)$ para $0 \leq r \leq R$ se llama un polítropo.

– Condiciones de contorno:

– $\rho = 0$ para $r = R$ (consecuencia de $P(R) = 0$)

– $d\rho/dr = 0$ para $r = 0$ (equil. hidrost. implica que $dP/dr = 0$ en el centro)

• Un polítropo está univocamente determinado por K , n y R .

– Permite determinar magnitudes(P , M , g , ..) en función del radio

Para resolverlo se procede de la forma siguiente:

– Se define la variable adimensional θ ($0 \leq \theta \leq 1$):

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (11)$$

$$P = K\rho^\gamma = K(\rho_c \theta^n)^\gamma = K\rho_c^\gamma \theta^{n\gamma} = P_c \theta^{n+1} \quad (12)$$

– En (10):

$$\frac{(n+1)K}{4\pi G\rho_c^{(n-1)/n}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n \quad (13)$$

– Se define la constante α^2 (dimensiones longitud al cuadrado):

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G\rho_c^{(n-1)/n}} = \frac{P_c(n+1)}{4\pi G\rho_c^2}$$

– Sustituimos r por la variable adimensional ξ :

$$r = \alpha\xi$$

– En (13):

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (14)$$

– *Ecuación de Lane-Emden* para la estructura de un polítropo de índice n .

– Condiciones de contorno:

En el centro $r = 0$: $\xi = 0$, $\theta = 1$ y $d\theta/d\xi = 0$.

– (14) se puede integrar comenzando en $\xi = 0$

• La solución $\theta = \theta(\xi)$ determina la estructura del polítropo excepto por la elección de ρ_c .

• Soluciones tabuladas: Lane-Emden se puede integrar numericamente para cualquier n

– $n < 5$: las soluciones $\theta(\xi)$ decrecen monotonamente; tienen un cero a un valor finito $\xi = \xi_1$ (radio estelar).

- Si $\theta = 0 \Rightarrow P = 0$ (superficie):

$$R = \alpha \xi_1$$

– $n = 0$: estrella de densidad cte.

– $n = 5$: $\theta(\xi) \neq 0$ para cualquier valor finito de ξ y la estrella se extiende al infinito

Masa total de un pol tro o

$$M = \int_0^R 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi \quad (15)$$

– y con *Lane – Emden* (14)

$$M = -4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = -4\pi \alpha^3 \rho_c \xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (16)$$

Relación Masa-Radio

Con la ecuación de la masa anterior, usando $\alpha = R\xi_1$:

$$\rho_c = D_n \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = D_n \bar{\rho} \quad (17)$$

– donde D_n son constantes de valor:

$$D_n = - \left[\frac{3}{\xi_1} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} \right]^{-1}$$

– Hallamos una *relación entre la masa estelar y el radio* con la ecuación de la masa, sustituyendo ρ_c y usando de nuevo la definición de α y su relación con el radio ($R = \alpha \xi_1$).

$$\left(\frac{GM}{M_n} \right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n} \right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G} \quad (18)$$

- donde M_n y R_n son constantes que varían con n :

$$M_n = -\xi^2 (d\theta/d\xi)_{\xi_1} ; R_n = \xi_1$$

• Caso $n = 3$: masa independiente del radio y determinada sólo por K :

$$M = 4\pi M_3 \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \quad (19)$$

– Para un valor de K hay sólo un valor de M que satisface la condición de equilibrio hidrostático

- Caso $n = 1$: radio independiente de la masa y determinado sólo por K :

$$R = R_1 \left(\frac{K}{2\pi G} \right)^{1/2} \quad (20)$$

- Para $1 < n < 3$, de (18):

$$R^{3-n} \propto \frac{1}{M^{n-1}} \quad (21)$$

- Significado: Radio decrece según la masa aumenta

Relación Presión y densidad centrales

- Sustituyendo K de la relación masa-radio en la ecuación de estado, $P = K\rho_c^{(1+1/n)}$:

$$P_c = \frac{(4\pi G)^{1/n}}{n+1} \left(\frac{GM}{M_n} \right)^{(n-1)/n} \left(\frac{R}{R_n} \right)^{(3-n)/n} \rho_c^{(n+1)/n} \quad (22)$$

- Eliminando R con (17) y poniendo todos los coeficientes dependientes de n en una constante B_n :

$$P_c = (4\pi)^{1/3} B_n G M^{2/3} \rho_c^{4/3} \quad (23)$$

- Nota: La dependencia sobre n es sólo a través de B_n y estos coeficientes varían muy lentamente con $n \rightarrow$ la relación presión - densidad centrales es prácticamente universal.

Cuadro 1: Constantes politrópicas

n	D_n	M_n	R_n	B_n
1.0	3.290	3.14	3.14	0.233
1.5	5.991	2.71	3.65	0.206
2.0	11.40	2.41	4.35	0.185
2.5	23.41	2.19	5.36	0.170
3.0	54.18	2.02	6.90	0.157
3.5	152.9	1.89	9.54	0.145

Modelo estándar de Eddington

Supongamos una estrella soportada por la presión de radiación y la presión gaseosa:

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} = \beta P \quad ; \quad P_r = \frac{1}{3} a T^4 = (1 - \beta) P \quad (24)$$

– Eliminando T entre ambas:

$$\begin{aligned} \beta^4 P^4 \left(\frac{\mu m_H}{\rho k} \right)^4 &= \frac{3(1 - \beta)}{a} P \\ P &= \left(\frac{k}{\mu m_H} \right)^{4/3} \left(\frac{3(1 - \beta)}{a \beta^4} \right)^{1/3} \rho^{4/3} \end{aligned} \quad (25)$$

– Esta es la ecuación de un polítropo con $n = 3$

$$K = \left(\frac{k}{\mu m_H} \right)^{4/3} \left(\frac{3(1 - \beta)}{a \beta^4} \right)^{1/3} \quad ; \quad P = K \rho^{4/3}$$

– La temperatura viene dada por:

$$T = \left(\frac{3k(1 - \beta)}{a \mu \beta m_H} \right)^{1/3} \rho^{1/3}$$

Masa de Chandrasekhar

Enanas blancas: densidad tal que su configuración viene dada por la presión de degeneración electrónica. Polítropos de índice $n = 1,5$

Masas $\sim M_\odot$, radios $\sim M_\oplus$, densidades $\sim 10^5 \text{ g cm}^{-3}$ y mayores.

– La ecuación que da la relación entre M y R

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G}$$

\Downarrow

$$R \propto M^{-1/3} \rightarrow \bar{\rho} \propto MR^{-3} \rightarrow \bar{\rho} \propto M^2$$

Supongamos una serie de esferas gaseosas degeneradas con sus masas incrementándose $\rightarrow R$ decrece a lo largo de la serie y ρ se incrementa con M^2 . Eventualmente ρ se hace tan grande que el gas de electrones se vuelve relativista. La estructura se volverá la de un polítropo con $n = 3$. En este caso, hemos visto que hay una solución para M unívocamente determinada por K .

Es decir la serie de esferas en equilibrio hidrostático termina en una masa límite: *Masa de Chandrasekhar*.

– Sustituyendo el valor de K en (19) (valor K_2 para el caso de degeneración relativista):

$$M_{Ch} = \frac{M_3 \sqrt{1,5}}{4\pi} \left(\frac{hc}{Gm_H^{4/3}} \right)^{3/2} \mu_e^{-2} = 5,83 \mu_e^{-2} M_\odot \quad (26)$$

– Para $\mu_e = 2 (He, C, O) \rightarrow M_{Ch} = 1,46 M_\odot$

– para $\mu_e = 2,15 (Fe) \rightarrow M_{Ch} = 1,26 M_\odot$

– Conclusión: Estrellas pobres en H con presión degenerada no pueden tener masa por encima de $1,46 M_\odot$ (realmente no se observan estrellas compactas que excedan este límite).

Ejemplos

1. Resolver analíticamente la ecuación de Lane-Emden para i) $n = 0$, ii) $n = 1$. Calcular ξ_1 y $M(r)$ en ambos casos.

■ $n = 0$

• Eq. de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

– para $n = 0$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2$$

– Integrando:

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3} \xi^3 + C$$

– Dividiendo por ξ^2 e integrando:

$$\theta = -\frac{1}{6} \xi^2 - \frac{C}{\xi} + D$$

– En el origen la solución no puede ser singular, luego debemos suponer $C = 0$, y como por definición en el origen $\theta = 1 \rightarrow D = 1$. La solución para $n = 0$ es:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6} \xi^2$$

– Por definición, en la superficie:

$$\xi_1 \equiv \xi(\theta = 0) = \sqrt{6} \quad ; \quad (d\theta/d\xi)_{\xi_1} = -\xi_1/3 = -\sqrt{2/3}$$

.

La masa:

$$M = -4\pi\alpha^3\rho_c\xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_c$$

– ($\alpha = R/\xi_1$)

– Conclusión: Un polítropo de $n = 0$ describe una configuración de densidad constante.

■ $n = 1$

– Se define la variable $\chi = \xi\theta$. Lane-Emden queda:

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = -\chi$$

– su solución general es:

$$\chi = C \sin(\chi - \delta)$$

– $C, \delta = \text{cte. de integración.}$

$$\theta = \frac{C \sin(\chi - \delta)}{\xi}$$

– $\delta = 0$ en el origen para que no haya una solución singular y como ahí $\theta = 1 \rightarrow C = 1$. La solución para $n = 1$:

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

– Su primer cero es $\xi_1 = \pi$.

– Diferenciando:

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} = \left(\frac{\cos \xi}{\xi} - \frac{\sin \xi}{\xi^2} \right)_{\xi=\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

– La masa será:

$$M = \frac{4R^3\rho_c}{\pi}$$

2. Demostrar que la masa del modelo politrópico estándar ($n = 3$) viene dada numericamente por:

$$M = 18,0 \frac{\sqrt{1-\beta}}{\mu^2 \beta^2} M_{\odot}$$

Datos: $(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}) = 2,01824$

- Para $n = 3$, la masa es:

$$M = -4\pi\rho_c\alpha^3 \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1}$$

$$-\alpha^2 = \frac{P_c(n+1)}{4\pi G\rho_c^2} = \frac{P_c}{\pi G\rho_c^2}$$

$$M = -4\pi\rho_c \left(\frac{P_c}{\pi G\rho_c^2} \right)^{3/2} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1}$$

- Por otra parte, para $n = 3$:

$$P_c = K\rho_c^\gamma = K\rho_c^{4/3}$$

$$M = -4\pi\rho_c \left(\frac{K\rho_c^{4/3}}{\pi G\rho_c^2} \right)^{3/2} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1} = -4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1}$$

- y T es:

$$T = \left[\frac{3k(1-\beta)}{\mu\beta m_H} \right]^{1/3} \rho^{1/3}$$

- La presión es:

$$P = P_G/\beta = \frac{\rho k T}{\mu m_H \beta} = \frac{\rho k}{\mu m_H \beta} \left[\frac{3k(1-\beta)}{\mu\beta m_H} \right]^{1/3} \rho^{1/3} = K\rho^{4/3}$$

– Sustituyendo en la expresión de la masa:

$$M = -4\pi \frac{1}{(\pi G)^{3/2}} \left(\frac{k}{m_H}\right)^2 \left(\frac{3}{a}\right)^{1/2} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi_1} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\beta^2 \mu^2}$$

– sustituyendo ctes:

$$M = 18,0 \frac{\sqrt{1-\beta}}{\beta^2 \mu^2} M_{\odot}$$